UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

TESIS DOCTORAL

Enfoque sistemático y modelización de la empresa de seguros (no vida)

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Jose Antonio Gil Fana

DIRECTOR:

Ubaldo Nieto de Alba

Madrid, 2015

José A. Gil Fana

ENFOQUE SISTEMICO Y MODELIZACION DE LA EMPRESA DE SEGUROS (NO VIDA)

Departamento de Actuarial y Financiero
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid
1984

Colección Tesis Doctorales. Nº 161/84

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1984
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-20362-1984

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

TESIS DOCTORAL

"ENFOQUE SISTEMICO Y MODELIZACION DE LA EMPRESA DE SEGUROS (NO VIDA)"

AUTOR: JOSE ANTONIO GIL FANA

DIRECTOR: Dr. UBALDO NIETO DE ALBA

MADRID, NOVIEMBRE DE 1.982

I N D I C E

I.

I N T R O D U C C I O N

1.1 LA EMPRESA COMO SISTEMA

El espectacular desarrollo que la organización empresa-rial ha tenido a partir de la segunda mitad del siglo XIX, la ha convertido en la actualidad en una de las formas más comple-jas de la organización social humana. Este crecimiento ha crea-do gran cantidad y variedad de problemas para la integración de los diferentes componentes de la empresa , asi como ha in-crementado la complejidad de las conexiones entre los mismos.

El problema fundamental es el de armonizar los objetivos perseguidos por los diferentes elementos que componen la empre-sa de forma que actuen como un todo para la consecución de un fin común.

Como indica el profesor López-Moreno: "el conocimiento de una realidad determinada puede ser sometido a un orden, de manera que relacione todos sus elementos componentes y además lo realice de un modo organizado. La base de partida unitaria permite concebir el sistema de la empresa de manera tal que sea posible llegar a un control equilibrado de la intercomuni-cación del sistema....

...La concepción de la empresa como sistema y el fenómeno de su organización, promueven una intensa corriente que la des-cribe analiza e investiga en su comportamiento. En ello, la Economía de la Empresa encuentra un clima interdisciplinar apropiado para abordar la lógica del comportamiento de las decisiones. La teoría general del sistema tiene implicaciones al respecto que ganará posiciones a la tradicional aplicación de técnicas concretas, por refinadas que sean, para resolver situaciones conflictivas típicas en los problemas de decisión".(1)

Desde una perspectiva de los sistemas podemos definir la empresa como:

"Sistema social,que adopta una estructura determinada por su interacción dinámica con los sistemas que forman su medio ambiente: clientes proveedores, competidores, gobierno etc. En su conjunto la organización empresarial es un sistema de partes interrelacionadas, operando unas conjuntamente con otras, a fin de cumplir los objetivos del todo y los individuales de los elementos participantes. El sistema empresa forma a su vez un entorno condicionante de los subsistemas y elementos que se integran en él".(2)

Comprender la empresa como un sistema compuesto a su vez por distintos sistemas (subsistemas) tiene como fín llegar a la coordinación necesaria para conseguir que sus operaciones sean las adecuadas y ocurran en el momento oportuno.

La empresa considerada como organismo vivo, ha de realizar una actividad dirigida a sobrevivir y desarrollarse en un medio cambiante que le obliga continuamente a ajustar su comportamiento. Esto es posible lográr a través de un mecanismo: el sistema de información. Este debe satisfacer las demandas de la dirección con la información adecuada en el momento oportuno; habrá de comunicar los elementos internos de la empresa dándoles cohesión asi como comunicarles con el mundo exterior con la finalidad de lograr su adaptación al medio.

En este sentido podemos definir el sistema como una red de relaciones de información que ponen en funcionamiento un conjunto de decisiones en los diferentes elementos del sistema lo cual hace que éste opere en la forma que le es propia.

Asi pues, los sistemas como medio de gestión de la empresa, permiten que se realize a su través: a) un direccionamiento escalonado al objetivo del sistema total. b) coordinar entre si una serie de redes menores de decisión que incluyen tratamiento humano y mecanizado. De la actuación de los responsables de decidir -incluidos los autómatas- depende la coordinación, ya que son el mecanismo regulador de los input/output de cada componente sobre el que tienen poder decisorio.

Fundamentalmente hay dos motivos por los cuales la empresa debe adoptar los sistemas:

La razon estructural....No basta poseer elementos aislados, hay que tenerlos interrelacionados y comprometidos de tal manera en los fines comunes que basta con que la dirección "pulse un boton" para que casi automáticamente se inicie la adaptación. El concepto de sistemas suministra a la empresa el modelo para una organización cambiante capaz de operar con éxito en un medio dinámico.

La razón instrumental. Las modernas técnicas en la empresa como la Investigación Operativa, el control de gestión y la toma de decisiones, junto con herramientas tan importan -

tes como el ordenador, están llamadas a ser los más activos instrumentos de la dirección y por tanto del organismo empresarial, en orden a su desarrollo. Pero sólo pueden ser aprovechados con éxito si los utiliza la empresa como un todo, en conjunto y si su estructura le permite, con tan solo un cambio de semántica hablar el lenguaje de estos medios. (3)

1.1.1. El entorno

En la empresa, como sistema abierto, es importante distinguir el objeto (la empresa en sí) y el entorno que interacciona con el objeto. Podemos decir, por tanto, que la empresa se relaciona con una serie de sistemas de categoría similar o superior que forman su entorno.

Los factores ambientales que afectan principalmente la actividad empresarial son los siguientes: (4)

-- Procedimientos y políticas de la empresa.- denominando política a una disposición que fija los actos administrativos y establece las lineas generales de autoridad, responsabilidad y normas. Procedimiento es una secuencia determinada de pasos para cumplir con una acción rutinaria y repetitiva.

-- Leyes y regulaciones gubernamentales.-

-- Factores de producción.- que influyen en los costes de los productos y servicios. Para la actividad aseguradora por ejemplo, es de gran importancia el mercado de trabajo.

-- Factores de comercialización.- han de ser satisfechas las demandas de los clientes. Es importante tener en cuenta los precios y calidad de los productos de la competencia.

-- Avances tecnológicos.- el desarrollo tecnológico no solamente puede afectar mercados y supervivencias de empresas, sino que promueven nuevos equipos, nuevas prácticas laborales y nuevos procesos adeministrativos.

-- Clima social.- que puede tener gran importancia en la empresa.

La respuesta de la empresa al entorno ha originado los caracteres básicos de estas organizaciones en las últimas décadas: especialización, producción en masa y automación.

Podemos describir el mecanismo de interacción con el entorno en la siguiente forma:

El medio ambiente ejerce unas ciertas acciones sobre la empresa, es decir manifiesta una influencia sobre la misma, a la que esta responde mediante su adaptación o su resistencia. Esta última sólo puede ser llevada adelante dentro de los márgenes de flexibilidad de la empresa; de cualquier forma, la organización busca absorber los factores que dificultan su comportamiento, o bien, aprovechar aquellos otros que le pueden favorecer. La adaptación se lleva a cabo mediante decisiones adaptativas que afectan en alguna forma a la estructura de los subsistemas de la empresa o a sus relaciones entre si y con el entorno.

A su vez la empresa lleva a cabo una acción sobre el entorno, representada por la que desarrolla sobre los sistemas que lo forman, clientes, competencia otras empresas etc. Sobre todos ellos ejerce una modificación en su comportamiento, o al menos trata de ejercerla, con la finalidad de orientar -- ciertos aspectos de ese comportamiento a su favor. Esas ac-- ciones provienen de la puesta en práctica de acciones modifi cativas, llevadas a cabo por decisiones de ese carácter que se generan en el interior de la organización.

Pero todo el juego de decisiones modificativas y adaptativas se puede llevar a cabo mediante transferencias de in formación entre el entorno y la empresa y entre los componen tes de ésta, puesto que los responsables de las decisiones - tienen que entrar en conocimiento de la información necesa - ria, tanto de la que es primaria como de la que procede de - la realimentación de sus acciones anteriores.

Es, por tanto, uno de los objetivos fundamentales de la empresa y a la vez función de la dirección, poseer el - sistema de información adecuado, en el sentido que le pro - porcione un conocimiento apropiado del entorno, sin olvidar el establecimiento de los mecanismos que posibiliten ejercer la influencia deseada sobre el mismo.

1.1.2. Análisis del Sistema Empresa.

Lo realizaremos siguiendo las etapas generales, de aplicación tanto para el sistema global como para los diversos subsistemas que lo componen, que detallamos a continuación: (5)

I) Análisis propiamente dicho. Distinguiremos las siguientes fases:

a) Formulación del problema con el que se enfrenta el sistema, razón de ser del mismo y obstáculos principales para su adecuado funcionamiento.

b) Organización del proyecto, asignando tareas, funciones y responsabilidades, equipos y personal.

c) Definición del sistema, explicación de los distintos subsistemas y elementos asi como las interacciones y acoplamientos. Las descripciones han de ser flexibles.

d) Definición del sistema ampliado (metasistema) que engloba al sistema objeto de estudio.

e) Definición de los objetivos del sistema ampliado, especialmente los que influyan en el sistema en estudio.

f) Fijación de los objetivos del sistema y subsistemas. En esto consiste la función de planificación que establece una serie de fines a alcanzar y el orden de preferencia de éstos.

g) Definición de los criterios económicos, cuya misión es medir la eficacia con que los diferentes subsistemas realizan las funciones y objetivos propuestos (control) asi como permiten resolver los conflictos entre diferentes objetivos. Los conflictos entre objetivos se pueden solucionar bien ponderando los objetivos en conflicto ó bien imponiendo restricciones o condiciones (de carácter objetivo o subjetivo) a cier tas variables que forman parte del criterio económico de decisión.

h) Información y recogida de datos,de forma que la información recibida por el sistema sea la adecuada tanto cualitativa como cuantitativamente. Se han de crear los adecuados canales de comunicación entre los distintos centros del sistema y con el ambiente.

II) Diseño del sistema. En los sistemas económicos normalmente comprende las siguientes fases:

a)Predicción a corto,medio y largo plazo de las variables esenciales del sistema.

b) Elaboración de modelos y simulación

c) Optimación. Una vez construido el modelo que predice el comportamiento del sistema es posible obtener el valor del criterio económico correspondiente a los diferentes "modusoperandi" del sistema. El proceso de selección del sistema cuyos resultados den el valor más favorable al criterio económico impuesto es lo que entendemos por optimación. Ha de tenerse en cuenta la posible suboptimación, esto es, la optimación de cada subsistema con independencia de los demás, lo que no conlleva el alcance del óptimo del sistema total.

d) Control, cuya necesidad estriba en que perturbaciones imprevisibes afectan al sistema y pueden motivar un comportamiento real del mismo diferente al previsto o estándar.

e) Fiabilidad, que depende lógicamente de la bondad del control del sistema, pero tiene además en cuenta los efectos de la incertidumbre ex-ante del sistema. Para hacer frente a e ventos imprevisibles se necesita un exceso de equipos, personal etc. que suponen un aditamento al coste total del diseño del sistema. Es necesario una extensiva modelización y simulación despues de la fase de optimación para verificar que el nivel de fiabilidad del sistema llega a niveles adecuados.

III) Programación (Instrumentación). En esta etapa se integran las siguientes tareas: Construcción del sistema óptimo; elaboración de instrucciones y códigos de funcionamiento a nivel hardware, software y a nivel de personal; y finalmente el diseño e instrumentación de las pruebas necesarias para probar la eficacia del modelo.

IV) Puesta en práctica. Consiste en llevar a la práctica las decisiones obtenidas en los modelos teóricos del sistema, observar el "gap" existente entre los resultados reales y los previstos y finalmente realimentar los resultados obtenidos modificando alguna de las etapas del análisis que hemos visto si es necesario.

La labor del analista de sistemas consiste en establecer la función de transferencia más apropiada (modelo global) y el instalar unos dispositivos de control adecuados asegurando los flujos de información necesarios para cumplir ambos requisitos.

1.1.3. El control.

Es la esencia del funcionamiento de la empresa como un sistema, de acuerdo con el principio cibernético de la realimentación.

Al describir la empresa como un sistema, se hace patente la importancia que tiene para ella corregir su propia actuación aprovechando su experiencia y positivando la información que recoge de la misma.

Tambien en el control reside la facultad de percepción de la intensidad de los esfuerzos en relación con la oposición que ejerce el medio ambiente, contrabalanceando las energías entre el cumplimiento de objetivos de índole interna y los de índole externa.

El control requiere:

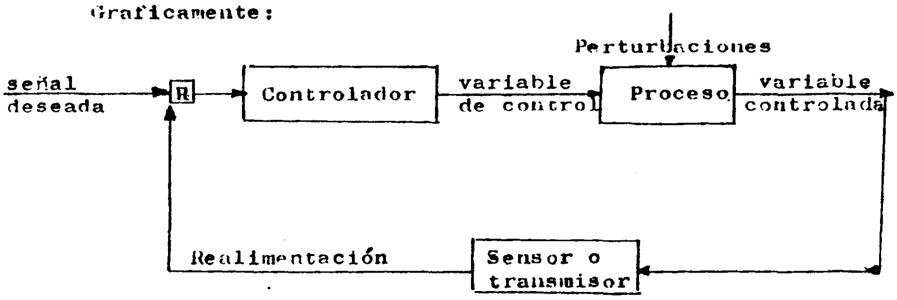
-- Un conjunto de elementos fundamentales u objeto de control, que constituyen el proceso. Se pretende que la señal de salida, que será normalmente la controlada, tome unos determinados valores (sistema de control) o bien siga la señal de entrada (servosistema)

-- Un sensor o dispositivo de medida output o salida del prodeso del sistema.

-- Un dispositivo regulador que compare la salida obtenida del sensor con el nivel deseado de la misma.

-- Un dispositivo controlador que genere una señal correctora o variable de control que actuando sobre el proceso del sistema consiga reducir la diferencia entre la señal de salida lograda y la deseada al mínimo posible.(6)

Graficamente:



En el caso de la empresa el control comienza con el conocimiento y evaluación de los resultados de la actividad, que obtendremos del sistema de información. En un segundo paso, estos resultados se comparan con los determinados de antemano como deseables, estableciendo las diferencias entre estos y los realmente obtenidos y analizando las causas de estas divergencias. Por último ajustará sus acciones de forma que los resultados se acerquen a los valores deseados.

Podemos definir el control como un sistema de coordinación de resultados y objetivos que alimenta un sistema de decisiones encaminado a hacer estable y progresivo el desarrollo de la empresa.

El proceso de control se encuentra íntimamente ligado con la planificación; el control se inicia con la planificación, la cual para ser eficaz necesita realimentarse con el conocimiento de sus resultados.

1.1.4 La Cibernética y el Sistema Empresa.

En una primera aproximación y según Weimer podemos definir la Cibernetica como "la ciencia de la dirección y comunicación en los organismos vivos y en las máquinas".

Para Kolmogorof, "La Cibernética se ocupa de estudiar los sistemas de cualquier naturaleza, capaces de percibir, conservar y transformar la información y utilizarla para su propia dirección y regulación"

Los sistemas cibernéticos poseen una triple característica: complejidad, probabilismo y homeóstasis.(7)

La investigación de la "caja negra" tiene precisamente por objeto desentrañar la complejidad del sistema. En los sistemas económicos dicha investigación está intimamente ligada al problema de la síntesis del sistema, por lo que ambos procesos se dan en forma simultanea.

El probabilismo en oposición al determinismo nos obliga a identificar los flujos de información en el sistema al objeto de conseguir su conducta óptima.

El carácter hemostático (control), trata de relacionar los conceptos de información regulación y supervivencia.

Al considerar la empresa como un sistema general, compuesto a su vez por otros sistemas relacionados entre sí, de forma tal que una alteración en uno de sus componentes induce a modificaciones en los restantes, produciendose un desequilibrio, surge el problema de regular, controlar y dirigir el sistema, pudiendo aplicar para su resolución la eficaz ayuda de la ci -

bernética y el ordenador como instrumento material.(8)

El método cibernético es el razonamiento analógico. Dado un mecanismo o sistema real, se llama modelo al mecanismo artificial análogo con el que se persigue poner al descubierto las propie-dades del mecanismo dado o proyectado en base al funcionamiento del modelo. Dos mecanismos son análogos cuando sus propiedades son idénticas. El razonamiento analógico es la operación mental que, cuando se han conocido ciertas analogías entre dos mecanismos, consiste en suponer que el mecanismo menos conocido posee tambien aquellas funciones que tiene el mecanismo mejor conocido y que no figuran entre las funciones comprobadas ya como comunes en ambos

Las técnicas utilizadas por la Investigación de Operaciones, entre las que nosotros destacaremos la progamación dinámica (en la 3ª Parte del presente trabajo veremos sus importantes aplicaciones en la construcción de modelos de la actividad aseguradora), presentan algunas limitaciones:(9)

- Concentra sus objetivos en un criterio único que trata de optimizar.

- Se limita a problemas tácticos en un cuadro estructural dado.

- La incertidumbre inmersa en el problema puede no ser probabilizable.

Si tenemos en cuenta:

a) Que los objetivos de la empresa no son únicos y aparecen jerarquizados. Ademas, a la vista de las nuevas informaciones van cambiando de naturaleza.

b) Que las perturbaciones e informaciones del medio exterior son múltiples y no pueden, o no convienen por razones económicas que se sometan cada vez al centro de decisión.

c) Que el problema muchas veces no es tanto el de saber la mejor decisión en cada período, como el de construir un mecanismo que, llegado el momento, tome por si mismo las mejores decisiones adaptada a la evolución de los acontecimientos.

d) Que con el advenimiento de la automatización se mecaniza la función misma de dirigir, o sea, tomar decisiones.

Si además consideramos los procesos de regulación, todo ello nos conduce a la concepción cibernética de la dirección empresarial, cuyas peculiaridades características son:

a) La Cibernética se caracteriza por el enfoque más general y abstracto de la dirección. Se basa en la forma universal de los procesos de dirección prescindiendo de su contenido concreto.

b) La Cibernética enfoca el problema de la dirección en el campo de los sistemas dinámicos complejos. Al considerar el sistema como un todo surgen propiedades de conjunto ausentes en cada uno de sus elementos integrantes.

c) El empleo de la información, de la acción de la señal para la dirección. La Cibernética centra el interés en el comportamiento del sistema y por tanto, en los flujos de información.

d) La dirección cibernética pone su énfasis en la regulación y el control del sistema para llegar a soluciones óptimas. El principio de regulación asegura la economía de la estructura del funcionamiento del sistema.

El procedimiento para hallar las soluciones óptimas consiste en la evaluación de las informaciones sobre la situación, en la fijación de una forma de comportamiento del sistema adecuada al objetivo señalado (estrategia) y en la elaboración de un programa para el comportamiento de los órganos de ejecución. Despues de considerar el conjunto de factores contradictorios, se trata de elegir el camino que conduzca el proceso en condiciones óptimas.

En base a la Cibernética, es posible mecanizar la gestión de la empresa, para lo cual podemos adoptar cualquiera de las siguientes concepciones de un sistema mecanizado:

1.- Tratamiento mecanizado.- por el mismo el ordenador permite la liberalización de ejecutar determinadas tareas administrativas que se mecanizan. Ej. Nomina, facturación.

2.- Tratamiento integrado.- se produce cuando uan vez alcanzado el tratamiento integrado de las macrofunciones, todas ellas se integran en un programa, de modo que al realizar un tratamiento se puedan obtener otros simultaneamente. Por ejemplo, integrar en un solo proceso la obtención de la nómina y su registro de facturación y contabilidad.

3.- Gestión mecanizada.-esta fase aporta un soporte de ayuda al dirigente en la toma de decisiones. Esta ayuda, le viene dada por el mundo de los modelos, de Control,de Previsión, de Decisión; que permiten actuar al empresario en un mundo restringido y una vez probado, el modelo puede ser algoritmizado y establecer una metodología para un proceso, desme nuzarlo y, acto seguido, automatizarlo, utilizandole con gran sencillez tantas veces como se precise.

4.- Gestión integrada.- Esta etapa comprende a su vez las anteriores, es decir, incluye los modelos de decisión, pero - hay algo más que aporta el empresario y es un sistema completo de información lo más exhaustiva posible de lo que es el mundo que tiene a su alrededor, de lo que en si es su empresa, - etc.

1.1.5 Los modelos.

Podemos definir modelo como una representación simplificada de carácter cuantitativo o cualitativo de un sistema.

En un sistema complejo real, como la empresa, intervienen gran número de variables y su comportamiento depende de complejas interacciones entre sus componentes. En general no se incluyen en un modelo todas las variables y todas las interacciones, bien por causas económicas: no se justifica ningún esfuerzo (por ejemplo una mayor recogida de información) cuyos beneficios sean inferiores a sus costes, bien por el desconocimiento de algunas de las variables significativas o de las interacciones entre algunas de ellas.

"El valor de un modelo surge cuando éste mejora nuestra comprensión de las características del comportamiento en forma más efectiva que si se observara el sistema real. Un modelo comparado con el sistema real que representa, puede proporcionar información a costo más bajo y permitir el logro de un conocimiento más rápido de las condiciones que no se observan en la vida real" (10)

Los modelos en el ámbito empresarial han de poseer el objetivo de ayudar a una mejor comprensión de la realidad que representan y a una resolución de los problemas concretos de la empresa.

Desde nuestro punto de vista, y partiendo de que utilizaremos un modelo matemático en todo caso, sería suficiente clasificar los modelos en:

-- Descriptivos o de decisión, si lo que pretendemos es el conocimiento del sistema o de las decisiones a tomar en el mismo.

-- Estáticos o dinámicos, en los primeros no consideraremos el tiempo, si en los segundos.

-- Estocásticos o no. segun posean dicho carácter o no algunas de sus variables

Sin embargo una clasificación más completa podría ser la siguiente: (11)

Por su medio de expresión

- Explícitos
  - Icónicos
  - Simbólicos
    - Verbales
    - Analógicos
      - Gráficos
        - Diagramas proceso
          - Lógicos
          - Otros
        - Otros gráficos
      - Otros analógicos
    - Matemáticos
      - Econométricos
      - Estadísticos
      - De investigación operativa
      - De cálculo
      - Geométricos etc.
    - Mixtos
- Implícitos

- Por su contribución al proceso de decisión
  - Descriptivos
    - Por su contenido
      - Explicativos
      - De control
      - De sistemas
      - Predictivos
        - Deterministas
        - De riesgo
        - De incertidumbre.
          - Total
          - Parcial
    - Por la forma de descripción
      - De las relaciones
      - De las causas
        - De caja negra
        - Conductistas
  - De decisión
    - de optimación
      - De programación
        - Lineal
        - No lineal
      - Otros de optimización
    - Heurísticos

Quizá sea oportuno justificar en alguna forma la razón por la cual consideraremos fundamentalmente los modelos matemáticos. Una descripción verbal puede formar un modelo de la organización y sus procesos, sin embargo, "la notación matemática es un lenguaje más especifico que el "ingles", menos ambiguo. Por tanto un modelo matemático es una descripción más clara que la de la mayoría de los modelos verbales...Su estructura lógica es más clara y puede utilizarsele con más rapidez a fin de predecir las posibles consecuencias de las suposiciones".(12)

Podemos significar las siguientes etapas en la construcción de un modelo:(13)

1.- Definición de las variables del modelo, clasificadas en variables dadas o dat-os y variables desconocidas o incógnitas.

2.- Indicación del grado de abstracción sobre el que discurrirá la exposición traducida mediante el conjunto de hipótesis.

3.- Descripción de las relaciones cuantitativas que se dan entre las variables, a través de unas ecuaciones.

4.- Resolución del sistema de ecuaciones, es decir, determinación explícita de las incógnitas o variables, en función de las variables explicativas.

5.- Interpretación del significado económico de los resultados. Proceso que establece el vínculo entre el conjunto de hipótesis iniciales y la serie de deducciones que se desprenden de tal interpretación.

Resulta importante la especificación de las variables (controlables,no controlables, cuantificables, no cuantificables etc.), de los parámetros y de las relaciones (causales, de condición o restricción, de influencia decisional etc.)

Simulación.- con el modelo podremos simular la conducta del sistema. La simulación persigue el objetivo de investigar las leyes que rigen el sistema estudiado mediante el análisis de los resultados obtenidos en sucesivos ensayos, lo que nos permitirá predecir, en alguna manera, el comportamiento del sistema para diferentes entradas.

Podemos señalar las siguientes ventajas de la simulación(14):

-- Reducción de los campos de riesgos posibles.

-- No perturbar el sistema real. Sobre todo si las consecuencias de la simulación son irreversibles.

-- Innecesaria espera a los acontecimientos en tiempo real, ya que se pueden simular varios años de conducta en un sistema en breves lapsos de tiempo.

-- Limitar el transcurso del tiempo. Parcializar un proceso rápido en secuencias de duración apropiada para su ámbito.

-- Simular situaciones aún no vigentes en la realidad, cuya aparición sólo es previsible en términos de expectativa, bajo ambientes de incertidumbre elevada.

Tambien se pueden dar ciertos inconvenientes:

-- Una vez trasladados los resultados del modelo simulado a la realidad, pueden no acomodarse a la misma.

-- En el momento de aplicar lo experimentado a la realidad, las circunstancias de ésta pueden haberse modificado sensiblemente y hacer inoperantes tanto la estructura como los resultados del modelo.

I.2. EL SISTEMA EMPRESA DE SEGUROS

Consideraremos sistema actuarial aquel que trata las componentes económico actuariales del ente asegurador, integrandolas en un todo unitario con la finalidad de conseguir un marco adecuado para la toma de decisiones racionales.

En este punto nos referiremos a los trabajos realizados por los profesores Nieto de Alba (15) y Vegas Asensio (16).

El primero de ellos, al estudiar la estructura del sistema actuarial indica:"trata de especificar los mecanismos internos que constituyen el gran Sistema Económico-Actuarial. En un primer paso hay que poner de manifiesto las conexiones entre los distintos Sistemas, Subsistemas y elementos que integran dicho Sistema.

Ello equivale a poner de manifiesto la estructura económico-actuarial básica de la empresa de seguros en relación con el ambiente en que desarrolla su actividad.

Con esta descripción cualitativa de los mecanismos económico actuariales estaremos ante un sistema estático, que por tanto, solamente será útil para decisiones a corto plazo.

El autor considera los siguientes sistemas básicos:

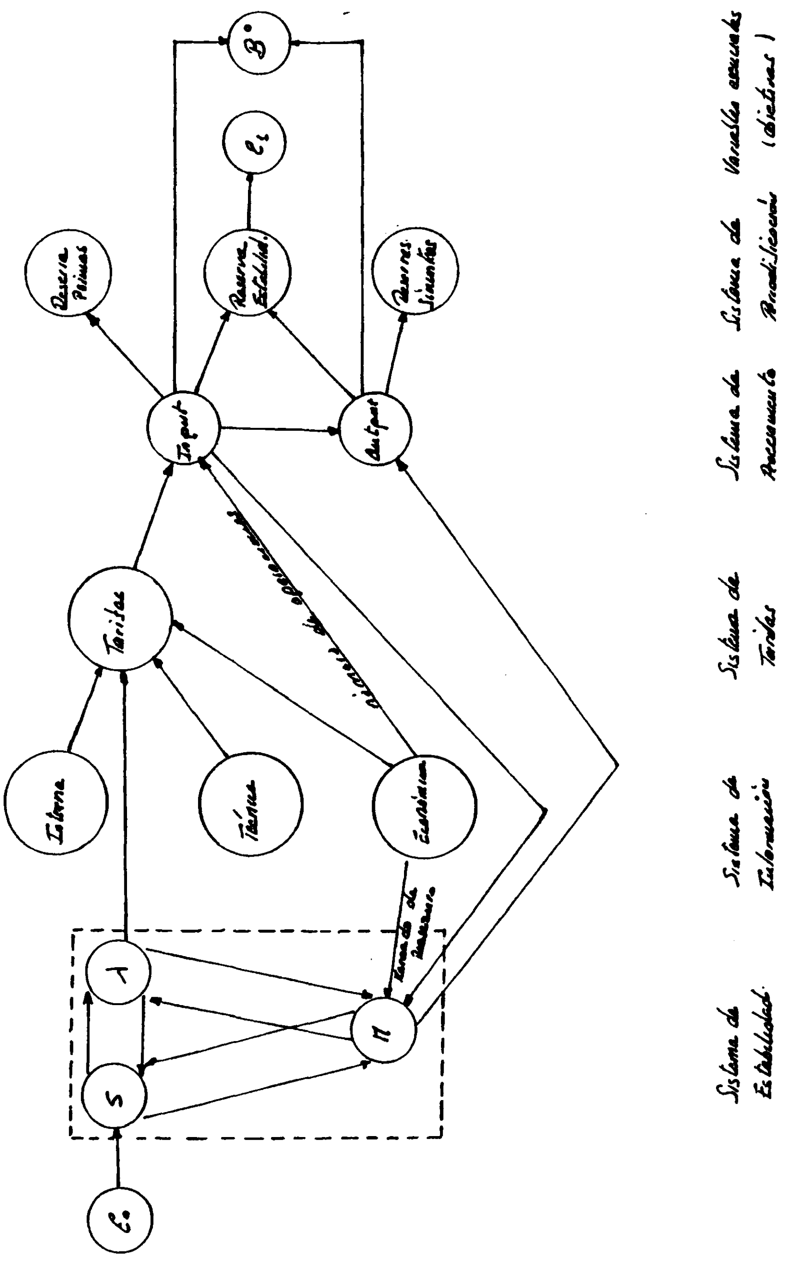
Sistema de estabilidad
- Indice de estabilidad
- Reservas de estabilidad
- Recargos de seguridad
- Reaseguro

Técnica
- Estadística y Tablas actuarial.
- Distribuciones básicas

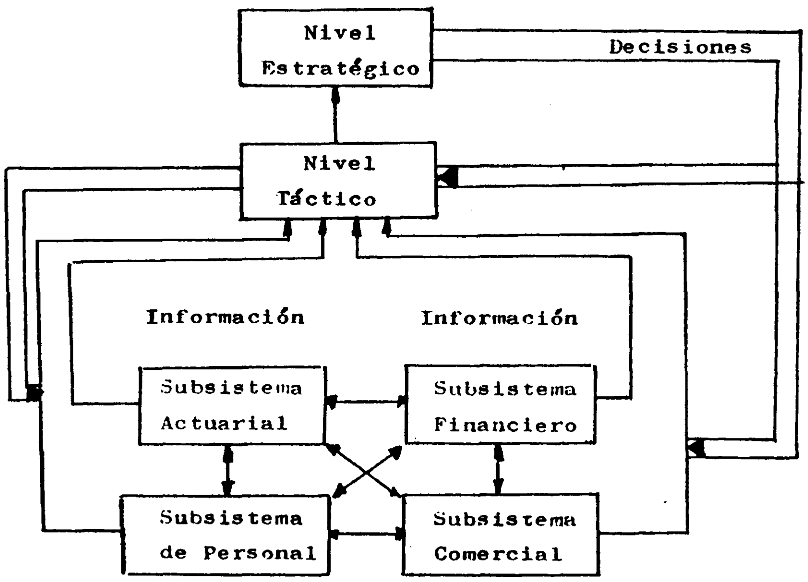
- Sistema de Información
  - Económica
    - Orden economico-social (Polfticadde Seguros)
    - Mercado Seguro directo
      - Oferta
      - Demanda
      - Competencia
    - Mercado del Reaseguro
  - Interna (de la empresa)
    - Gastos de gestión
    - Inversiones
    - Contabilidad
- Sistema de Tarifas
  - Primas puras (bases de 2º orden)
  - Recargos de seguridad
  - Gastos de gestión
    - Interna
    - Externa
- Sistema de procesamiento
  - Input (primas)
  - Output (siniestros)
  - Input-output del reaseguro
- Sistema de periodificación
  - Económica
    - Reservas de primas
    - Reservas de siniestros
  - Técnica.- Reserva de estabilidad

Considerando como variables esenciales, el indice de estabilidad (probabilidad de ruina) y el beneficio.

En la representación de la página siguiente aparece el grafo del sistema, asi como su preordenación de acuerdo con el sentido de los arcos que indican los flujos económico-actuariales y de información:


Interna
Técnica
Económica
Tarifas
Input
Output
Reserva Primas
Reserva Estabilidad.
Reservas Siniestros
número de operaciones
Sistema de Estabilidad.
Sistema de Información
Sistema de Tarifas
Sistema de Procesamiento
Sistema de Pronóstico (?)
Variables esenciales (objetivas)

Posteriormente en su Comunicación al 21 Congreso Internacional de Actuarios, el profesor Vegas Asensio plantea una distinción en la empresa de seguros de tres niveles de sistemas: estratégico, táctico y operativo



Nivel operativo

El primero de ellos, el estratégico, genera las políticas, programas y procedimientos que determinan la forma y el grado de interacción entre los otros dos niveles y el ambiente del sistema, así como sirve de lazo de conexión entre la empresa y su ambiente. Corresponde esencialmente a la función de establecimiento de planes y objetivos a largo plazo.

El nivel táctico corresponde a la elaboración de planes a medio y corto plazo así como la función de organización en la empresa en aras a conseguir los objetivos impuestos por el nivel estratégico. Sirve como canal de comunicación y filtrado de información entre los otros dos niveles.

El nivel operativo es el que ejecuta los planes y utiliza los recursos de que dispone la empresa con propósitos optimales.

Cada subsistema que integra el nivel operativo se caracteriza por el siguiente análisis input-output:

Subsistema comercial

Entradas

-- Del ambiente: clientes potenciales, productos y tarifas de la competencia, estructura del mercado, nivel de ventas e impacto de los productos de la empresa, política de la Administración (comisiónes legales a agentes), conservación y caída de cartera, condiciones económicas generales.

-- Del sistema: capacidad de elaboración de nuevos productos, capacidad de ventas (personal vendedor), recursos financieros , política comercial establecida por la gerencia.

Salidas

Al subsistema actuarial sobre requerimientos técnicos; al subsistema financiero sobre ingresos por ventas (primas) e información para la elaboración del presupuesto; al subsistema de personal sobre requerimientos del mismo; al ambiente v- ventas de seguros y publicidad.

Subsistema de Personal

Entradas:

Del ambiente: política laboral, situación económico laboral, actividad de la competencia.

Salidas:

Personal especializado en las funciones de los restantes subistemas operativos o personal directivo o perteneciente al departamento de proceso de datos; nóminas de personal; análisis de los costes de administración y de producción cobro y cartera (subsistema actuarial).

<u>Subsistema financiero</u>

Entradas:

Ingresos monetarios en concepto de primas, de comisiones o participación en beneficios del reaseguro cedido, de - intereses de préstamos, de la cartera de valores etc.

Salidas:

Egresos monetarios en concepto de pagos por siniestros, sueldos y salarios, primas de reaseguro cedido, reparto de beneficios a los asegurados, dividendos, intereses de los depósitos de los reasegurado es, exacciones e impuestos etc.

En cuanto al <u>Subsistema actuarial</u> podemos identificar - los siguientes elementos:

Entradas de información:
- Interna de la empresa
- Económica del subsistema comercial.
- Técnica

En no-vida la información técnica consiste en información sobre las distribuciones básicas, factores de riesgo, función de producción del sevicio seguridad...

Las funciones del subsistema actuarial afectan principalmente a las siguientes áreas:

- Tarificación
  - Bases técnicas
    - Distrib. Básicas
    - Tablas mortalidad
    - Tipos tecnicos interés.
  - Cálculo de primas
    - Prima de riesgo
    - Recargos de segurid.
    - Recargos de gestión
    - Margen beneficio
  - Selección de riesgos y tratamiento de riesgos agravados.
- Periodificación
  - Periodificación económica de
    - Primas: Reservas matemáticas y Reservas de riesgos en curso.
    - Siniestros: Reservas de siniestros pendientes.
  - Periodificación técnica: Reservas de estabilidad.

Estabilidad: Estableciendo modelos matemáticos que permitan asignar los valores óptimos a las variables de decisión: recargos de seguridad, modalidades y plenos de reaseguro y Reservas de estabilidad. Las Teorías del Riesgo (individual,Colectivo y moderno) constituyen un adecuado instrumento para conseguir la estabilidad adecuada del ente asegurador.

- Variables esenciales
  - Indice de estabilidad o probabilidad de ruina de la empresa.
  - Beneficio y dividendos repartibles.

Inversiones: criterios de liquidez, solvencia y rentabilidad.

1.3. MODELOS DE LA EMPRESA ASEGURADORA.

1.3.1 Los modelos y la toma de decisiones

En principio podría pensarse que las decisiones tomadas en la empresa de seguros se fundamentan en conceptos bien definidos y datos estadísticos fiables. Sin embargo, esto no es cierto en todos los casos, ya que un número importante de decisiones han de ser tomadas por pura intuición y basadas en datos estadísticos insuficientes. Según Harald Bonman (17) si los responsables solo desarrollasen los problemas bien definidos y con una base estadística válida para la toma de decisiones, el negocio de seguro no funcionaría.

El mismo autor distingue entre "datos sólidos" y "datos blandos" (hard-data y soft-data), los primeros son aquellos dados numéricamente, válidos y fidedignos, esto es, describen y miden realmente los fenómenos en los cuales estamos interesados. Los segundos serán, por tanto, aquellos no dados numéricamente, o bien, si lo están, no son suficientemente válidos y fidedignos para formar opiniones precisas sobre dichos fenómenos.

Los "datos sólidos" pueden ser usados para una toma automática de decisiones, si ésta es deseable. Si puede ser fijado un criterio para la decisión y depende del valor de un "dato sólido", podría dejarse la toma de la misma a un computador. En la mayoría de los casos reales la decisión no puede basarse enteramente en datos de ese tipo y no puede ser dejada al computador.

Plantearemos la necesidad de un modelo matemático capaz de describir y analizar los "datos sólidos" relevantes de la empresa."La idea es que estos datos suministrados y analizados de esta forma pueden servirmos como una valiosa herramienta para la toma de decisiones en la empresa de seguros, cuando hemos considerado ambos tipos de datos" (18)

La creación de un modelo matemático del negocio asegurador conlleva un esfuerzo para la elección de los elementos relevantes del mismo y su integración en la secuencia lógica en que actuan en el sistema que representa el modelo.

Para la introducción de un modelo, K. Borch indica las siguientes etapas: el primer paso es ver si el modelo parece aceptable a priori. Si es así, el segundo paso será examinar las implicaciones del mismo, para ver si alguna de ellas se en-cuentra en contradicción con las observaciones. Si el resultado de este exámen es satisfactorio, procederemos a un análisis estadístico para estudiar lo aproximado del modelo a la realidad. Por fin, estimaremos los parámetros del mismo y lo utilizaremos para la toma de decisiones en el sistema real

"La ventaja de trabajar con un modelo es que nos proporciona una guia para la recogidà y análisis de los datos. Un buen modelo debería indicarmos los datos que necesitamòs y porqué." (19)

1.32 La modelización en seguros.-

A efectos del presente estudio clasificaremos los modelos del negocio asegurador en dos tipos:

a) Modelos de los diversos sistemas parciales que componen el sistema total asegurador.

Estos nos servirán para la toma de las decisiones adecuadas en orden a la consecución de los objetivos fijados para el sistema parcial considerado en base a la información obtenida del entorno, del resto del sistema y del propio sistema parcial.

Asi los distintos sistemas parciales se transforman en centros de decisión.

Sin embargo, hemos de entender como objetivos fundamentales a conseguir los fijados para el sistema total, lo que nos lleva a que las decisiones tomadas en los sistemas parciales tengan como fin la consecución de los objetivos generales de la empresa aseguradora más que la optimización de los mismos.

El problema que se nos plantea es el de descubrir las interrrelaciones existentes entre los diversos sistemas parciales, para poder llegar al conocimiento de la forma en que las decisiones tomadas en uno de ellos influyen sobre el resto y sobre los objetivos del sistema total.

Hemos de establecer un criterio en base al cual se han de tomar las decisiones en los sistemas parciales. Este puede ser el siguiente:

Si tomamos como objetivo la obtención del máximo beneficio, siendo éste una variable aleatoria y con distribución de probabilidad $G(y)$, las distintas decisiones tomadas en los sistemas parciales tendrán unas determinadas consecuencias sobre la distribución $G(y)$.

Considerando una función de utilidad para las consecuencias $U(G)$ y si el decisor tiene unas preferencias, según las consecuencias de sus decisiones, todo ello nos conduce al concepto de orden que se introduce por medio de unos axiomas los cuales reflejaa la conducta racional del decisor. Estos axiomas definen una estructura de orden que, en determinadas ocasiones, es respetada por la función de utilidad asociada a cada acción. Esta viene dada por:

$$U(G) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y)\ dG(y)$$

Con ello disponemos de un criterio para las decisiones: tomaremos aquellas que maximicen $U(G)$.

El negocio de seguro propiamente dicho (primas-siniestros) ha sido amplia y fructiferamente estudiado. Para el análisis de la siniestralidad hemos de destacar el que podemos denominar modelo de riesgo o siniestros acumulados, en que se consideran dos variables aleatorias: el número de siniestros y la cuantía de uno de ellos. A partir de la distribución de las mismas obtendremos la distribución de la siniestralidad total, fundamental para el desarrollo de nuestro trabajo. La operatividad del modelo se consigue con las distintas aproximaciones desarrolladas para la distribución -

de la siniestralidad total.

Considerando que las operaciones de seguro son de naturaleza aleatoria es importante el estudio del efecto de las fluctuaciones del mismo carácter que se producen en el negocio de riesgo. El primer modelo que lo ha analizado como un todo es el de la Teoría del Riesgo Colectivo. Suponiendo que la compañía aseguradora posee una cartera de riesgos fija durante un período de tiempo (0,t), obtendrá unos ingresos de las primas de la misma. Partiendo de unas reservas iniciales, podemos obtener el denominado proceso de ruina de la comparacion de los ingresos acumulados y el proceso de riesgo comentado anteriormente. Si en un momento la siniestralidad acumulada es superior a los ingresos acumulados se producirá la insolvencia técnica, que comunmente denominaremos "ruina". El modelo nos permite estimar la probabilidad de que se produzca la ruina. Por otra parte, nos permite integrar tres elementos básicos sobre los que podemos decidir para conseguir la estabilidad del negocio: reaseguro, recargo de seguridad y reservas de estabilidad.

Por tanto la Teoría del Riesgo Colectivo constituirá la base de nuestro estudio sobre el sistema de estabilidad.

La actividad inversora va cobrando importancia dentro de la empresa de seguros, siempre la ha poseido en el ramo de vida a través del tipo de interés técnico, pero podemos afirmar que la posesión de una cartera de inversiones equilibrada debe suponer para una empresa que opere en seguros generales un instrumento eficaz para conseguir una adecuada relación -

estabilidad-equidad en un marco de competencia.

El estudio del sistema de inversión lo haremos en base a los principios de liquidez, rentabilidad y seguridad, estableciendo los modelos adecuados para ello.

Por otra parte, parece conveniente integrar la actividad aseguradora y la actividad inversora, estudiando conjuntamente su carácter aleatorio. Esto nos llevará a una ampliación del sistema de estabilidad y al planteamiento del correspondiente modelo para su análisis.

Para la obtención del beneficio económico de un ejercicio hemos de imputar los gastos e ingresos (siniestros y primas) al ejercicio en que realmente se han devengado. Este proceso será denominado periodificación económica y se realizará en seguros no-vida a través de las reservas de riesgos en curso y de las reservas de siniestros pendientes.

El estudio de las mismas lo realizaremos considerándolas tanto un elemento necesario para la determinación del beneficio como para la determinación de la solvencia estática de la compañía. Plantearemos los métodos más comunes de cálculo, haciendo incapié en la dificultad e importancia que representa para la compañía el cálculo de los siniestros sucedidos pero no conocidos aun, para el que se han desarrollado en los últimos años varios modelos.

Por fin, el sistema de tarifas tendrá como objetivo la determinación del precio al que se ofrecerá al público el servicio prestado por la entidad. Haremos referencia a los principales sistemas de tarificación y modelos para la construcción de una tarifa.

b) Modelos del sistema total asegurador.

A ellos dedicaremos la segunda parte del presente trabajo de Tesis Doctoral.

Constituirán una representación simplificada de la empresa de seguros. Esta es un sistema excesivamente complejo y por tanto el modelo no recogerá todas las características del mismo.

"Un modelo global de una empresa no es otra cosa que una red, lo más compleja posible, de las relaciones funcionales verificadas entre todas las variables, todos los factores y todos los parámetros que influyen en los objetivos principales y secundarios que se asignan a la empresa"(20)

No consideraremos los modelos determinísticos, en palabras de Pentikäinen, éstos han adquirido un importante lugar en la dirección e investigación del ente asegurador, sin embargo, el carácter aleatorio añade a los mismos una mejora notable en su aplicabilidad. Nos proporciona información sobre las fluctuaciones en el negocio características en no-vida, a la vez que nos puede ayudar en gran medida a la resolución de los problemas relacionados con la solvencia. Por otra parte, es cierto que el elemento probabilista complica los modelos en forma importante y las dificultades de cálculo pueden llegar a ser rápidamente abrumadoras. Este problema puede ser resuelto en parte utilizando aproximaciones y métodos abreviados.

Es evidente que el carácter aleatorio nos lo ha de dar, en nuestro modelo,fundamental-mente la siniestralidad. En esta linea hemos tomado como un primer modelo global para la toma de decisiones en la entidad aseguradora el proporcionado por la Teoría del Riesgo Colectivo. En base al mismo tomaremos decisiones sobre el recargo de seguridad, reaseguro y reservas de estabilidad. Podemos formular dos importantes críticas:

-- No considera el resto de las actividades que se realizan en la empresa aseguradora. En este caso, las decisiones que tomemos en base al mismo serán aceptables en relación al peso que el negocio de riesgo posea en el conjunto del resto de la empresa.

-- No representa de forma veraz la realidad económica, ya que supone una acumulación indefinida de las reservas, no considerando el reparto de dividendos en caso de beneficio.

El problema de los dividendos ha sido abordado por varios autores. Nosotos consideraremos los estudios realidados por De Finneti y Karl Borch, este último nos proporciona una solución al mismo basándose en la programación dinámica, esto es, planteandolo como un problema de decisiones secuenciales.

Sin embargo, no hemos del olvidar a otros autores que han aportado alguna luz al problema como Buhlmann (21), Gerber (22) y Pechlivanides (23).

Un modelo más elaborado que nos permite una toma de decisiones secuenciales y que se basa tambien en la Teoría del -

Riesgo Colectivo es el "modelo estocastico-dinámico" que ha desarrollado durante los últimos años Tievo Pentikäinen y sus colaboradores. En él se introducen las actividades básicas que realiza la empresa aseguradora así como los factores del entorno que poseen una mayor influencia sobre la misma. La aleatoriedad en el mismo nos la sigue proporcionando la siniestralidad, usando por tanto, la simulación estocástica de la siniestralidad total únicamente. El resto de las actividades consideradas se introducen en forma determinística.

El modelo nos permitirá un rápido conocimiento del efecto conjunto de un importante número de variables de decisión como reservas, reaseguro, dividendos, gastos de promoción de ventas etc.

Finalizaremos considerando un modelo descriptivo y dinámico de la empresa aseguradora. A través del mismo podremos conocer cómo se produce la corriente monetaría en el interior de la entidad aseguradora, asi como su control en orden a conseguir los objetivos de rentabilidad, solvencia y equidad.

II.

ANALISIS DEL SISTEMA ASEGURADOR

II.1. EL ENTORNO DE LA ACTIVIDAD ASEGURADORA

II.1.1. EL MARCO CONSTITUCIONAL

II.1.1.1. Orden político y orden socio-económico.

Si tenemos en cuenta la extrecha relación existente -- entre el orden pólitico y el social y económico, resultará - de interés realizar un análisis, aún somero, del primero de ellos a la luz de nuestra Constitución.

Los principios básicos del mismo se encuentran establecidos en su artículo primero:"España se constituye en un Estado social y democrático de Derecho...."

Un Estado de Derecho significa que el Estado y el poder político se autorregulan y autosometen al derecho

El término democrático añade dicho carácter a la autorregulación y ejercicio del poder, "la soberanía nacional reside en el pueblo español del que emanan todos los poderes - del Estado"(artículo 1º,2.)

El Estado social indica que desde la estructura política se promueve sin atentar a la libertad, una estructura social justa.

El articuló 9 en su segundo párrafo al establecer:" Corresponde a los poderes públicos promover las condiciones para que la libertad y la igualdad del individuo y de los grupos en que se integran sean reales y efectivas; remover los obstáculos que impidan o dificulten su su plenitud y facilitar la perticipación de todos los ciudadanos en la vida política económica cultural y social", contiene el vínculo de unión entre el orden polítcico y el orden social y económico, que pasamos a estudiar, tambien en forma somera, seguidamente.

El modelo socioeconómico que configura nuestra Constitución es el de una economía de mercado. Asi en el artículo 33 reconoce el derecho a la propiedad privada y en el 38 la libertad de empresa en el marco de la economía de mercado. Ambos artículos se encuentran en el Título 1º de la Constitución dentro de los derechos "protegidos". Por tanto la libertad económica es un derecho que constitucionalmente tiene que ser garantizado su ejercicio y protegido juridicamente.

Sin embargo, en toda economía de mercado existe una mayor o menor intervención del Estado. Ello nos plantea el problema de los límites constitucionales de esta intervención. El liberalismo a ultranza no tiene cabida en nuestra Constitución según se desprende del numero 1 del artículo 40 que dice:"Los poderes públicos promoverán las condiciones favorables para el progreso social y económico y para una distribución de la renta regional y personal más equitativa en el marco de una política de estabilidad económica. De manera especial realizarán una política orientada al pleno empleo.

Parece que el modelo de "economía social de mercado" tiene un encaje perfecto. Este se caracteriza porque la asignación de recursos se hace mediante mercados competitivos y porque la política económica se dirige a la consecución de los objetivos sociales. Cuenta con una fuerte intervención del Estado encaminada a potenciar la competencia (intervención conforme a mercado). Sin embargo los problemas de orden social y redistributivo no se resuelven interfiriendo el mercado; se deja al mercado que asigne eficazmente los reesursos para, posterirormente, a través de mecanismos fiscales y redistributivos conseguir los objetivos de justicia social. Tambien se dá en este modelo una gran intervención mediante la política de coyuntura, para el restablecimiento de los equilibrios internos y externos.

Otro elemento básico de la economía social de mercado, es concebir a la empresa no solamente como unidad económica, sino tambien como unidad social.Asi el articulo 129 en su párrafo segundo establece:"los poderes públicos promoverán eficazmente las diversas formas de participación en la empresa y fomentarán , mediante una legislación adecuada, las sociedades cooperativas, Tambien establecerán los medios que faciliten el acceso de los trabajadores a la propiedad de los medios de producción".

La posibilidad de planificar la actividad económica se establece en el artículo 131 de la Constitución:"El Estado, mediante ley, podrá planificar la actividad económica general para atender a las necesidades colectivas, equilibrar y armonizar el desarrollo regional y sectorial y estimular el crecimiento de la renta y de la riqueza y su más justa distribución".

Por otra parte el artículo 128, 2. dice:"se reconoce - la iniciativa pública en la actividad económica. Mediante ley se podrá reservar al sector público recursos o servicios esenciales, especialmente en el caso de monopolio y asimismo acordar la intervención de empresas cuando asi lo exigiere el interés general"

Es precisamente el interés general, al que subordina la Constitución la actividad económica,"Toda la riqueza del pais en sus distintas formas y sea cual fuere su titularidad está subordinada al interés general" (art.128, 1.)

La protección de los consumidores se establece en el artículo 51,1.:"Los poderes públicos garantizarán la defensa de los consumidores y usuarios, protegiendo, mediante procedimientos eficaces, la seguridad, la salud y los legitimos intereses económicos de los mismos".

En cuanto a los agentes económicos privados nestra Constitución establece: art. 7:"Los sindicatos de trabajadores y las asociaciones empresariales contribuyen a la defensa y promoción de los intereses económicos y sociales que les son propios. Su creación y el ejercicio de su actividad son libres dentro del respeto a la Constitución y a la ley. Su estructura interna y funcionamiento deberán ser democráticos".
El art. 28:"Todos tienen derecho a sindicarse libremente....
... Nadie podrá ser obligado a afiliarse a un sindicato".

Se reconoce el derecho a la huelga de los trabajadores para la defensa de sus intereses".

El articulo 37:"La ley garantiza el derecho a la negociación colectiva laboral entre los representantes de los trabajadores y empresarios, asi como la fuerza vinculante de los convenios". En su nuemro 2 "Se reconoce el derecho de los trabajadores y empresarios a adoptar medidas de conflicto colectivo. La ley que regule el ejercicio de este derecho..... incluirá la garantías precisas para asegurar el funcionamien to de los servicios esenciales de la comunidad"

II.1.1.2. Adaptación del sector asegurador al nuevo entorno.

Es evidente que el ente asegurador desarrolla su actividad en un entorno sociopolítico que,en alguna forma, limita o condiciona su actividad.

En el anterior modelo no jugaba plenamente la economía d-e mercado, ya que la centralización política impedía la descentralización económica. Además en el sector seguro, por sus peculiares características de tener que controlar la solvencia de las empresas, ello dio lugar a un auténtico intervencionismo administrativo. En materia de precios, éstos eran aprobados por la administración, con lo cual el mercado aparecía uniformado en cuanto a tarifas. Los márgenes comerciales contenidos en las mismas han excitado la creación de nuevas entidades accediendo al mercado aseguradores con un grado de profesionalización que no correspondía con la complicación técnica del negocio de seguros. El excesivo número de empresas de escasa dimensión, la falta de tecnificación, el acudir a reaseguros con bajos plenos de retención, son las características dominantes de la estructura del sector del seguro español en lo que se refiere al grado de concurrencia.

En lo referente a la competencia, dada la uniformidad de las tarifas, se hacía a través del condicionado de las pólizas y la calidad del servicio (atención al asegurado en caso de siniestro). Ello restaba transparencia al mercado, ya que el condicionado de las pólizas raramente es conocido por los asegurados. En estas condiciones el papel de agente de seguros ha cobrado una gran importancia, ya que sobre él gravitaban los problemas de la falta de transparencia y de competencia del mercado.

Es por tanto necesario que el sector del seguro ha de adaptarse al contexto de libertad democrática, es decir, adaptarse a un entorno en el que van a regir los siguientes principios:

-- Descentralización de las decisiones. Los sujetos socioeconómicos tendrán que asumir la responsabilidad de sus propias decisiones.

-- La intervención del Estado tiene que ser conforme a mercado. Es decir , no asumiendo las decisiones de los sujetos socioeconómicos sino fijando y vigilando las reglas del juego de la competencia.

-- Por tratarse de una actividad basada en la confianza tiene que estar sometida a un control encaminado a garantizar los derechos de los asegurados, la solvencia, la profesionalidad y la responsabilidad de los aseguradores dentro de u-n orden de libertad y competencia.

II.1.1.3 El control administrativo de la empresa de seguros.

Tiene una doble justificación:

--La necesidad de defender los intereses concretos de los asegurados, ya que el sacrificio de quien opta por la - previsión y el ahorro exige una acción tutelar a la que ningún Estado moderno debe renunciar.

--Es preciso que la sociedad cuente con instituciones solventes y eficaces para el mejor cumplimiento de su función económica y social.

Los principios que han de regir el control son:

-- Solvencia del ente asegurador con respecto a la masa de recursos ajenos, su estabilidad, su eficacia y su responsabilidad en la gestión

-- Equidad, que afectando a la relación empresario-asegurado exige que la operación sea equitativa socialmente. Es decir, que los servicios esten jurídicamente asegurados y realicen a precios económicamente equitativos.

Hemos de tener presente, como pondremos de manifiesto más adelante, que la solvencia y el precio se encuentran técnicamente relacionados.

El control ha de afectar tanto a los entes aseguradores como a las operaciones que realizan y en ambos casos hay que distinguir el control preventivo y el control inspector (ex-ante y ex-post respectivamente).

En lo que respecta al control de la empresa aseguradora, al exigirse unos capitales y depósitos inicales mínimos y el hecho de no caducar la inscripción con sólo realizar u na operación (cosultar los articulos 6, 7 y 11 de la Ley de Seguros Privados de 16 de diciembre de 1.954) ha dado lugar a la existencia de un gran número de entidades de escasa dimensión. El aumento de las trabas administrativas para conceder la autorización no ha dado resultado. Por otra parte el control inspector ha estado dedicado a seguir de cerca las visicitudes del ente asegurador: funcionamiento contable, cambios de domicilios, fusiones etc.

En cuanto al control de las operaciones, encaminado a hacer realidad el principio de equidad, tanto en su aspecto jurídico (derechos y obligaciones) como en el económico (precios ajustados a las coberturas), ya hemos visto que el control heredado ha sido, más bien, un intervencionismo administrativo, tanto en lo referente al condicionado de las polizas (hasta la ley 50/1.980 de Contrato de Seguro), como en los precios (tarifas sometidas a aprobación previa).

Parecería más apropiado que el control no se encaminase a dificultar el acceso a la profesión con barreras artificiales, exigiendo naturalmente unos capitales y garantías mínimas, pero poniendo un mayor énfasis en el control ex-post. Es decir, despues de un período de funcionamiento y aprendizaje, reservar a la autoridad técnica supervisora la facultad de retirar la autorización a quienes no muestren un grado de solvencia, eficacia y comportamiento adecuados (discrecionalidad ex-post).

En materia de operaciones hay que devolver al mercado su auténtica función competitiva a través de los precios. De lo contrario ésta función se traslada a los tribunales a la hora de interpretar esa variedad de clausulado de las pólizas.

Con la ley de Contrato de Seguro, que ha de ser respetada por las pólizas, se simplifica el control administrativo ex-ante, ya que se reducirá a constatar que sus clausulas respetan los preceptos imperativos de la Ley. La discreccionalidad de la Administración y las influencias corporativistas sobre la misma se reducen.

En cuanto a las tarifas, debe haber libertad de precios para que éstos constituyan el auténtico factor de competencia, que junto con la reducción de las controversias en la liquidación de siniestros, se consigue una gran transparencia del mercado.

Como quiera que la solvencia está relacionada con el precio, la política enlaza con lo ya apuntado: la necesidad de poner el énfasis en el control ex-post siguiendo de cerca la solvencia de la entidad y la actuación responsable de sus gestores, pues la eficacia (precios equitativos) se traslada al mercado y la defensa de los derechos del asegurado a normas de carácter imperativo y a su interpretación por los tribunales.

II.1.2 CRISIS ECONOMICA Y SEGURO.

Sin proponernos realizar un estudio en profundidad de la situación economica actual, lo que se encuentra fuera de los limites del presente trabajo de Tesis Doctoral; parece oportuno, partiendo de los problemas en que se encuentra inmersa nuestra economía, analizar la influencia que sobre el sector asegurador tienen éstos.

Como se indica en uno de los informes de ICEA (24): "Está ampliamente demostrado, desde el punto de vista estadístico y contrastado por la observación diaria y el sentido común, que la evolución del seguro corre intimamente ligada a la marcha ganeral de la economía. Pero aún más, el sector asegurador, por ser parte integrante de ese amplio cuerpo político y social que es España, tiene una problemática, o unos síntomas de problemas, que no son más que los reflejos de otros que, a nivel más general se dan en todo el país.

La ausencia de ideas claras sobre este fenómeno de interrelación estrecha economía-seguro puede ser causa de importantes errores de planteamiento e incluso de decisión".

Desde el punto de vista de la economía, el que ahora nos ocupa, podemos destacar como problemas más importantes los relativos a la inflación, el paro, el ahorro y la inversión y como consecuencia de ellos el propio desarrollo económico del país.

Examinemos su influencia en el seguro, haciendo un mayor incapié en los ramos no-vida.

III21. La inflación y el paro

Las fuertes elevaciones de precios, unidas a las expectativas generales de elevaciones futuras, están produciendo un desequilibrio en las rentas y condicionando a su vez el comportamiento de los principales sujetos económicos del país que son la Administración Pública, las empresas privadas y las economías domésticas. Los niveles y tipo de gastos las expectativas de incrementos de costes y de recorte de los beneficios, y las presiones salariales y habitos de consumo, no hacen sino seguir alimentando el proceso inflacionista español a la vez que su secuela imnediata que es el paro.

La influencia de la inflación en el seguro es distinta según el aspecto del mismo que nos interese. Asi será distin en función del ramo a que nos refiramos, o a la faceta del negocio a que se atienda (no es lo mismo el aspecto técnico, que el finan-ciero, por ejemplo,), tambien el indice de inflación alcanzado jugará una gran importancia.

Podemos destacar los siguientes aspectos negativos de la inflación en el sector asegurador:

1.- La inflación en algunos casos imposibilita y en otros desanima el ahorro, anticipando el consumo. Los seguros con una fuerte componente de ahorro (y un bajo interés técnico) han de perder atractivo para el asegurado.

2.- En seguros de daños, la inflación trae consigo un incremento de las indemnizaciones. Si las primas no se adaptan convenientemente, las entidades aseguradoras sufrirán cre cientes déficit técnicos. En un sistema de tarifas administradas la adaptación suele ser más lenta, lo cual agrava el problema. Los gastos de gestión tienen similar problemática.

3.- La inflación incrementa (en términos monetarios) las obligaciones de la entidad aseguradora, no aumentando en el mismo sentido los activos para hacerlas frente. Esto deteriora la solvencia de la misma.

El seguro es, pues, uno de los mayores interesados en la establidad de los precios del país a la que, dentro de sus posibilidades, contribuye a través de la colocación de sus reservas a largo plazo.

II.122. El ahorro y la inversión.

Es evidente que la situación de crisis económica por la que atraviesa nuestro país durante los últimos años no es la más propicia para el ahorro: el paro, unido al incremento continuado de los precios ha disminuido las posiblidades de ahorro de los grupos sociales de menor poder adquisitivo; por otra parte la dificultad de mantener el ahorro en términos reales y las expectativas futuras de inflación provocan el incremento del consumo en detrimento del ahorro.

"Cuando se examina la inversión hay que pensar en el paro, en la inflación, en el ahorro, en las expectativas empresariales etc. Es preciso ver el conjunto, pues lo importante no son cada una de las variables por si solas, sino todas ellas a la vez....

....España está pasando por una grave crisis de inversión privada desde 1.975, experimentando valores negativos en su crecimiento".(25)

Las causas de la caída de las inversiones son diversas pudiendo citar las siguientes:

-- La excasez de dinero con el consiguiente incremento de los tipos de interés, que convierten en no rentables una parte importante de los proyectos de inversión.

-- La disminución general del excedente empresarial y de las expectativas de beneficios.

-- La incertidumbre relativa al modelo político,económico y el de relaciones laborales.

"La crisis de la inversión está afectando de forma especial al seguro en sus tres vertientes:

1.- Como proveedor de cobertura de riesgos sobre los activos de la economía, pues estos activos no crecen, como sería preciso que lo hicieran, debido a la falta de inversión.

2.- Como intermediario financiero que recoge ahorro colectivo para invertirlo a largo plazo, pues al resentirse el ahorro, se resienten tambien las primas de seguro y, en consecuencia, las inversiones.

3.- Como actividad puramente empresarial que sufre de los mismos problemas que las demás empresas, o sea, incremento de los costes, rigidez de los precios, caída de los excedentes, baja productividad etc". (26)

II.1.3 NUESTRO FUTURO ENTORNO: LA COMUNIDAD ECONOMICA EUROPEA

Es evidente que la incorporación, más o menos cercana, de España a la Comunidad Económica Europea supone un reto para el conjunto de nuestra economía.

Sin duda uno de los sectores fuertemente afectados por la integración será el del seguro: será precisa una doble adaptación, la legislativa, mediante la acomodación de la normativa en materia de seguros a las directrices comunitarias y la puramente económica, intentando que nuestras empresas se encuentren, en el momento de la integración, a nivel de las del resto de la comunidad.

En lo que sigue, trataremos de analizar nuestro "entorno futuro", asi como el sector asegurador español en la actualidad y la problemática que representará para el mismo las necesarias reformas que habrá de afrontar de cara a su supervivencia una vez dentro del Mercado Común.

II.1.3.1 El Tratado de Roma: criterios generales sobre la libertad de establecimiento y la libertad de prestación de servicios. (27)

El segundo artículo del Tratado de Roma de 25 de marzo de 1.957 dice: "La Comunidad tendrá como objetivo, mediante el establecimiento de un mercado común y el acercamiento progresivo de las políticas económicas de los Estados miembros, promover un desarrollo armónico de las actividades económicas dentro de la Comunidad, una expansión continua y equilibrada, una estabilidad creciente, una elevación acelerada del nivel de vida y relaciones más estrechas entre los Estados que la componen".

En el artículo 3 enumera, entre otros, los siguientes medios para conseguir dichas finalidades:

c) la abolición entre los Estados miembros de los obstáculos a la libre circulación de personas.

f) el establecimiento de un régimen que garantice que la competencia no será falseada en el Mercado Común.

h) la aproximación de las legislaciones nacionales en la medida necesaria para el funcionamiento del Mercado Común.

De las libertades de establecimiento y prestación de servicios se ocupan los capitulos 2 y 3 respectivamente del Título III, (articulos 52 a 66).

El articulo 52,2 dice: "la libertad de establecimiento llevará consigo el acceso a las actividades no asalariadas y su ejercicio, y a la constitución y gestión de empresas y especialmente las sociedades, en el sentido del articulo 58,2, en las condiciones definidas por la legislación del pais de establecimiento para sus propios súbditos, a reserva de las disposiciones del capítulo relativo a capitales".

En el campo del seguro, la libertad de establecimiento consisitirá en la facultad de una empresa de seguros de constituirse y establecer agencias o sucursales en el territorio de cualquiera de los Estados miembros, sin discriminación alguna respecto a las empresas nacionales de dichos Estados.

En lo referente a la libertad de prestación de servicios el articulo 60 indica:

"En el sentido del presente Tratado se consideran como servicio las prestaciones realizadas normalmente a cambio de remumeración, en la medida en que no se rijan por las disposiciones relativas a la libre circulación de mercancias,capitales y personas.

Los servicos comprenderan, en especial:

b) actividades de caracter comercial.

c) actividades de profesiones liberales".

El art. 61,2 cita la actividad aseguradora:

"La liberalización de los servicios bancarios y de los seguros vinculados a los movimientos de capitales, se realizará en armonía con la liberalización progresiva en la circulación de capitales".

La prestación de servidos puede contemplarse en tres sentidos:

-- Desplazamiento del que presta el servicio cerca del que lo recibe (prospecciones, consultas etc.)

-- Desplazamiento del beneficiario del servicio hacia el que lo presta (turismo).

-- Desplazamiento solamente del soporte de la prestación (filmes, publicidad, estudios, etc.). En este caso se encuentra el seguro.

Como indica Besson y recoge en su conferencia el Sr. Mansilla, se entiende por libertad de prestaciones la facultad de una empresa de seguros de realizar mediante remuneración, operaciones de seguro en un país del Mercado Común en -

el que no posea agencias ni sucursales, así como inversamente la facultad de un asegurable de contratar un seguro con una empresa que se halle establecida en el Mercado Común, - pero que no posea agencias ni sucursales en el país de su - domicilio. De la misma manera debe entenderse, respecto de los intermediarios.

El 28 de diciembre de 1.961, el Consejo estableció un programa para la supresión de las restricciones a la libertad de establecimiento y otro para la supresión de las restricciones a la libre prestación de servicios, ambos relativos al seguro.

Ambos planes establecían fechas tope a la realización de las libertades enunciadas; así para el establecimiento en materia de reaseguro se fijaba el último día de 1.963, para el seguro directo no vida, 1.965 y en relación al seguro directo vida y agentes y corredores de seguros, 1.967. Para la libertad de prestación de servicios las fechas eran 1.965, - 1.967, 1969 y una vez reconocida la libertad de prestación - de servicios,según los ramos, a las empresas.

Las condiciones previas, establecidas por el programa para la realización de la libertad de prestación de servicios fueron las siguientes:

-- que la libertad de establecimiento se haya realizado en el ramo de que se trate.

-- que se hay realizado la coordinación de textos legales que regulan el contrato de seguros, en la medida que su - disparidad pueda entrañar un perjuicio para los asegurados o para terceros.

--que se hayan simplificado las formalidades para el reconocimiento de las sentencias y ejecución recíproca de - las mismas.

La fechas en el programa general del Consejo no se han cumplido, ni siquiera en el caso más fácil, el del reaseguro. Sin embargo, las sentencias recientes del Tribunal de las - Comunidades, han acelerado el proceso de liberalización y superado la mayor parte de las condiciones previas, al hacer directamente aplicable el Tratado de Roma, una vez finalizado el 31 de diciembre de 1.969 el período transitorio.

Para el desarrollo de los citados artículos 52 a 66 del Tratado de Roma se han dictado una serie de directrices que - afectan a la actividad aseguradora, unas de una forma especifica mientras que otras afectan a la actividad empresarial en - general y por tanto a la aseguradora.

En lo referente a la libertad de establecimiento hemos de destacar la Directriz de 24 de julio de 1.973 referida al seguro directo no vida, acceso y ejercicio de la actividad. Así en sus artículos 6 y siguientes se refiere a la autorización administrativa para el acceso a la citada actividad, el programa de actividades a realizar, las exigencias a empresas con - sede social en otro Estado miembro para abrir sucursal o agencia, las reservas técnicas, el margen de solvencia.

Para nuestro país esta Directriz tendrá una apreciable repercusión sólo en lo relativo al margen de solvencia, ya que desde la Ley de 14 de mayo de 1.908 no existe discriminación en-

entre los aseguradores extranjeros establecidos en España y los españoles. El reglamento de desarrollo de 1912 ha sido bastante liberal en esta materia.

Sin embargo, el margen de solvencia y el fondo de garantía mínimo plantean una serie de problemas que, siguiendo al Dr. Mansilla, los podemos agrupar en cuatro categorías:

1.- los problemas que se derivan del caracter general del margen de solvencia.

2.- los problemas específicos de las pequeñas entidades

3.- los que se pueden plantear en relación con el control del margen de solvencia.

4.- los problemas específicos para las entidades de los paises que se incorporan a la Comunidad con posterioridad a la vigencia de la Directriz.

Los dos primeros problemas serán tratados en el capítulo que dedicaremos a la solvencia de la entidad aseguradora.

Por otra parte es evidente que las diferencias en materia de control de un país a otro tendrán una importante repercusión: en momentos en que sea difícil mantener los fondos suficientes para cumplir con el margen mínimo de solvencia, aquellas que se encuentren en paises con autoridades flexibles tendrán una posibilidad de desarrollo menos obstaculizado que sus competidoras. El problema se agudiza si tenemos en cuenta que el artículo 16 de la Directriz no determina el sistema de valoración de las partidas que han de considerarse para la cobertura del margen, lo que se deja al criterio de las autoridades nacionales. A esto podemos añadir las diferencias de tratamiento fiscal que pueden asistir en la constitución, modificación y cancelación del margen de solvencia y de las partidas que integran su cobertura.

Si además contemplasemos las diferencias en otros aspectos legislativos, las causas de distorsión de la concurrencia se incrementarían.

Refiriendonos al último de los problemas, es claro que las normas comunitarias se establecen teniendo en cuenta los intereses de aquellos que intervienen en su elaboración.

"El problema es que todos los acomodos, matizaciones, transacciones y evaluación de efectos, que los paises que intervienen en la elaboración de las normas van sopesando y asimilando con flexibilidad y tiempo, recaen de golpe sobre los paises de nuevo ingreso, cuyas peculiaridades ni se han podido discutir, ni se han podido tener en cuenta, ya que nos estaban presentes en la fase de redacción"

La libertad de prestación de servicos tendrá para los diferentes paises de la Comunidad problemas referentes tanto a las normas jurídicas como a la realidad aseguradora.

Diversas Sentencias del Tribunal de Justicia de las Comunidades (por ejemplo las de fecha 27 de junio de 1.974, 3 de diciembre de 1.974 y 26 de noviembre de 1.975), dan aplicabilidad directa a los articulos 59 y 60 del Tratado de Roma, pudiendo ser invocados ante las jurisdicciones nacionales, por tanto las Directrices que se dicten a ese fin tendrán como objeto no el establecimiento de la libertad de presta-ción de servicios, sino la supresión de los obstáculos natura res que constituyen actualmente un freno al pleno ejercicio del derecho a la libre prestación de servicios. Habrán de ser abordados temas relativos a los sujetos de la libertad de prestación de servicios de seguro: asegurador y asegurado, riesgos, condiciones generales, primas, concurrencia, las reservas técnicas y su inversión, fiscalidad y control de las entidades aseguradoras.

El impacto que producirá la libre prestación de servicios en el sector asegurador español, dependerá evidentemente tanto de la forma en que se desarrolle la normativa comunitaria a éste respecto,como de la evolución de nuestras empresas y los plazos y condiciones de la incorporación a la Comunidad.

II.1.4. CARACTERISTICAS DEL SECTOR ASEGURADOR ESPAÑOL. PROBLEMATICA ANTE LA INTEGRACION EN LA C.E.E.

El sector asegurador español se encuentra claramente - menos desarrollado que el de los paises que constituyen el - Mercado Común.

Unas cifras comparativas nos pueden dar una idea de este hecho:(28)

- Las primas per capita en dolares USA para España y diversos paises de la C.E.E eran en 1.977:

España: 66,1 Italia:84,2 Francia: 270,7 G.Bretaña: 275
Bélgica: 333 Alemania: 456,4

La diferencia es aprecia-ble, siete veces menos que Alemania, por ejemplo. En el ramo de vida esta diferencia se acentúa, disminuyendo algo para losSeguros no vida.

- El porcentaje de primas en relación con el PNB es en comparación con el mismo conjunto de paises y para el mismo año.

España: 1,69 Italia: 2,39 Francia: 3,62 G. Bretaña: 5,69
Bélgica: 4,93 Alemania: 3,75.

- Suponiendo un crecimiento anual acumulativo para el seguro español del 20 por ciento, podemos señalar en términos anuales lo que tardaría España en alcanzar el nivel de los anteriores paises:

Italia: 1,18 Francia: 7,72 G. Bretaña:7,83 Bélgica: 8,88
Alemania: 10,59

- Tambien es interesante comparar la potencia económica y financiera de las empresas comunitarias con las españolas. Asi según el Anuario L'Argus , las primas de la mayor entidad de seguros (1.976) en los paises considerados eran:

Italia (Generali): 1.620 Francia (U.A.P): 1.862
G.Bretaña (C.Union):2.392 Bélgica (Royal Belge): 404
Alemania (Allianz Vers.): 2.426 (millones de dolares USA)

La mayor entidad española en volumen de primas en ese mismo año era la Unión y el Fénix cuyo volumen de primas era de 95 millones de dolares en España (otros 95 en el extranjero).

Entre las sesenta mayores entidades de seguros europeas no se encontraba ninguna española.

Incluso en el contexto de la industria española, las empresas aseguradoras no se encuentran en los primeros puestos, no sucediendo lo mismo en los paises de la Comunidad donde las entidades aseguradoras se encuentran entre las 50 o incluso 25 de mayor dimensión.

Nos parece de interés analizar las causas que han dado lugar al escaso desarrollo comparativo del seguros español en relación al conjunto de los paises del Mercado Común.

El citado informe de I.C.E.A. distingue dos tipos de causas: las externas a la industria del seguro, que se refieren al entorno general del país y las causas internas, propias y específicas del seguro.

Entre las primeras hace mención a las siguientes:

1.- Las relativas al desarrollo económico gneral de España:

El desarrollo económico de un país, condiciona de forma importante el de la actividad aseguradora.

Es de esperar que a los niveles de desarrollo de la economía española, la actividad aseguradora ha de crecer por encima de ella, mejorando su participación en la producción nacional y ampliando el nivel de cobertura de riesgos de las diferentes industrias y las distintas capas de la población.

Sin embargo cuando el resto de los paises de la Comunidad tenían un desarrollo similar al actual de España, el desarrollo de su seguro era muy superior al nuestro actual.

Necesitamos pues otras causas explicativas de nuestra situación.

2.- Las de tipo sociológico:

En los seguros personales, es evidente que la expansión de las primas corre pareja con las posibilidades de generar ahorro por parte de las economías domésticas.

Con el incremento y redistribución de la renta, se incrementa el número de unidades familiares con capacidad de ahorro, el nivel de equipamiento y de riesgo y finalmente se desarrolla en interés y la capacidad por adquirir seguros.

El escaso desarrollo y los elevados niveles de concentración de la renta en España, puede ser otra de las causas de la escasa dimensión del sector asegurador español.

3.- Las de tipo sicológico y cultural:

Desde un punto de vista sicológico y cultural, la población española no está suficientemente sensibilizada hacia la institución aseguradora, al menos en comparación con otros nivels internacionales. Esta circunstancia a la vez de influir sobre el índice de aseguramiento es primordial de tener presente cuando se trata de diseñar objetivos de expansión para el seguro ya sea a corto como a largo plazo, pues es de sobra conocido que la modificación de las actitudes de los individuos o grupos es un proceso lento y difícil.

En estudios publicados por ICEA (por ejemplo el informe 164) se confirma que los seguros de personas no son ampliamente sentidos por los ciudadanos a la hora de colocar su excedente de renta, ni siquiera es conocido el beneficio que produciría su adquisición.

En lo que respecta a los seguros no personales, el análisis no difiere grandemente del anterior. Tienen tambien un carácter residual a la hora de materializar el gasto por parte de las empresas, lo cual los hace extremadamente sensibles a los momentos de crisis económica o social, de falta de liquidez financiera o de necesidad de reducir costes internos de las empresas.

Los seguros de responsabilidad no tienen importancia en el mercado español, a excepción del seguro de automóviles cuya expansión viene dada por su carácter obligatorio.

4.- Las debidas al ordenamiento legal.

Ya hemos abordado anteriormente este tema. Es evidente que el sector asegurador necesita una normativa que se a dapte a las circunstancias con las que habrá de enfrentarse en el futuro.

La ley 50/1980 que regula el Contrato de Seguro supone un paso adelante. Como indica el Informe Económico y Financiero de RUMASA del año 1.980:"Es la primera vez que se dicta una ley sobre el tema, por lo que los contratos de seguros hasta ahora deberían adaptarse a las normas que se establecen en el Código Civil y el de Comercio, normas que han quedado deregadas. La nueva ley viene a conferir un caracter más progresista al contrato de seguro, constituyendose como un instrumento mucho más flexible de lo que lo era hasta el momento."

Mas adelante se indica:"Pero todavía falta mucho camino por recorrer y es necesaria la aparición de nuevas normas legales que estimulen un mayor grado de condentración empresarial"

Es necesaria una ley de ordenacion del Seguro Privado que prepare al seguro español para el nuevo entorno en que va a encontrase.

En cuanto a las causas específicas o internas del subdesarrollo del sector, el informe indica las siguientes:

1.- El sistema de distribución de seguros:

"El seguro se caracteriza, entre otras notas, porque es quizás uno de los exponentes más claros de producto o servicio que no se compra generalmente a través de una decisión expontanea del cliente, sino que es preciso realizar una operación de convencimiento y de venta, y además mantener un contacto continuado y sistemático entre asegurado y entidad".

El seguro español adolece de una estructura distributiva aun poco profesionalizada en términos generales, o sea que la colocación de las pólizas en el mercado no se realiza siempre a través de unas redes comerciales dedicadas en todo tiempo a la producción de seguros. Por el contrario esta actividad es, a menudo, compartida con otras de carácter comercial o profesional.

Esto ha tenido consecuencias decisivas en la formación y en la carrera profesional de los vendedores, en el interés por mejorar su tarea, y en la unidad de intereses y esfuerzos entre la red de distribución y la entidad aseguradora.

El cliente no percibe la importancia y la calidad que tiene una póliza de seguros para él.

La distribución de los seguros no ha estado lo suficientemente diferenciada de la distribución de otros bienes y servicios.

2.- La estructura de la oferta:

La oferta de seguros presenta una característica que - resalta sobre todas las demas: la fuerte atomización. Esta - se manifiesta en dos aspectos:

-- el elevado número de entidades de seguros(casi 700).

-- la pequeña cuota de mercado que poseen las mismas.

El problema de la atomización trae consigo los siguientes efectos: (29)

- Costes elevados.
- Baja productividad.
- Reducida retención de primas.
- Menor rentabilidad de las inversiones.
- En consecuencia se presenta el problema relativo al margen de solvencia por inexistencia de beneficio, además no permite investigar y en consecuencia hay que importar tecnologia extranjera.
- Solo un escaso número de entidades podrán tener la capacidad suficiente para desarrollarse en el Mercado Común.

Es por tanto necesaria la adopción de medidas legales que fomenten la concentración y fusión de las entidades.

En todo caso se pueden plantear concentraciones de manera "no juridica" utilizando una acción corporativa o servicios comunes entre entidades, con filosofía común de actuación, como medio para solucionar los puntos débiles o consecuencias de la atomización: reducir gastos mediante una mecanización común, servicios técnicos comunes: selección de personal, contar con especialistas comunes etc.

3.- Desarrollo organizativo de las empresas y empleo - de los recursos:

"El desarrollo organizativo de las empresas es una consecuencia de la introducción en las mismas de avanzados sistemas de organización y de gestión que promuevan la economía de los recursos, que impulsen la productividad y la racionalidad en el trabajo y que, finalmente, mejoren el servicio y la atención a los clientes..."

Las empresas deben alcanzar unos niveles mínimos de eficiencia productividad y competencia, que son los que le - permitirán seguir operando en el mercado.

La productividad del seguro español no posee los niveles que serían deseables para hacer frente a la competencia de las empresas del Mercado Común. La productividad depende de tres elementos básicos:(29)

-- Del entorno en que se desenvuelve el seguro, del nivel de desarrollo de los mercados y de la capacidad económica de los individuos y empresas del país.

-- Del empleo de sistemas modernos y avanzados de organización del trabajo y de gestión global de la empresa. En - resumen, de una buena organización empresarial.

-- Del coste de los recursos que se emplean. En general del precio de los distintos factores que intervienen en el - proceso productivo.

Podemos caracterizar al seguro español con las siguientes notas:

- No empleo de sistemas avanzados de organización.

- Ausencia de empleo de las técnicas del marketing.
- Poca importancia del trabajo en equipo.
- Falta de políticas adecuadas sobre reclutamiento, selección y formación del personal.
- Escasa utilización de departamentos dedicados a la imnovación y progreso.

Estas circunstancias unidas a la situación socioeconomica han llevado a un incremento de la relación gastos de gestión/Primas que en conjunto se situa por encima del 40%, porcentaje muy superior al que poseen en general las empresas de la Comunidad.

En el cuadro siguiente, podemos apreciar que el incremento se debe fundamentalmente a los gastos de gestión interna, que si bien no es excesivo, no resulta aceptable si tenemos en cuenta que se esperaba una importante reducción de los mismos en proporción a las primas.

	1.972	1.974	1.976	1.978
G.G.I/Primas %	19,5	19,6	21,7	22,55
G.G.E/Primas %	20	19,8	19,41	19,62

Es importante destacar el gran incremento de los costes de personal del que nos dan una idea los siguiente datos:

Costes personal/Primas%	11,32	11,6	13,36	14,96

Con nuestro ingreso en el Mercado Común se abrirán amplios mercados a las entidades aseguradoras españolas, pero tambien habrá que competir con las grandemente desarrolladas empresas del mismo, sin olvidar la futura entrada en los mercados europeos de las compañías Norteamericanas y Japonesas que comienzan a mostrar interés por ellos.

Es indudable la necesidad de una adaptación de las empresas aseguradoras españolas a nuestra futura realidad.

Pienso que los objetivos fijados en el Plan Estratégico del Seguro Español del año 1.975 pueden seguir siendo válidos en este momento. De forma esquemática estos son:(30)

1.- Expansión del volumen de primas

2.- Concentración del mercado. En dos sentidos:

a) Crecimiento de las grandes empresas.

b) Concentración de entidades medianas y pequeñas.

3.- Disminución de los costes de gestión

4.- Incremento de la rentabilidad de los capitales invertidos.

5.- Objetivos de apoyo.

a) Estricto control de la solvencia.

b) Ayuda fiscal a las fusiones, concentraciones y colaboraciones entre entidades aseguradoras.

c) Establecimiento de comisión máxima a agentes diferenciando su importe de acuerdo con las tareas realizadas.

d) Liberalización de las inversiones.

e) Ayudas fiscales a los asegurados.

II.2 LA INFORMACION EN LA EMPRESA DE SEGUROS.

Distinguiremos tres tipos de información:

a) Económica (del entorno)

b) Interna (de la empresa)

c) Técnica.

Para la captación de la información del primero de los tipos, la empresa ha de poseer los adecuados canales de relación con su entorno que proporcionen a los centros de decisión del sistema total y de los distintos subsistemas la información precisa y en el momento oportuno. La información económica se referirá a aspectos tales como legislación referente a la actividad aseguradora, situación económica general y en concreto del sector asegurador (mercado de seguros de reaseguros etc).

Al emprender el estudio del entorno de la empresa aseguradora se realizó un análisis más profundo de los aspectos señalados, remitiendonos a él en este punto.

La información interna versará sobre aspectos tales como el conocimiento de los gastos de gestión que se producen en los diferentes departamentos de la empresa en orden a su correcta imputación a las distintas modalidades de seguros en que opere la misma. Una adecuada tarificación precisa del conocimiento de los verdaderos valores de los componentes del coste del servicio. Tambien será de gran interés la comparación de la rentabilidad de las distintas inversiones y el interés técnico fijado.

La contabilidad será un eficaz instrumento para estos fines.

La información técnica tendrá una mayor relevancia en el conjunto del presente trabajo y por tanto será examinada en mayor profundidad. Estadísticas y distribuciones básicas, factores de riesgo, función de producción del servicio etc -- constituirán este tipo de información.

Como indica el profesor Prieto: "La afirmación realizada con carácter general de que en todas las actividades económicas las decisiones deben fundamentarse en información estadística fiable y suficiente, adquiere un especial significado en la actividad aseguradora. En efecto en la empresa aseguradora a la falta de información estadística hemos de asociar forzosamente deficientes políticas de selección de riesgos, ofertas audaces de coberturas, un control de gestión subjetivo y en consecuencia que muchas decisiones sean incorrectas, poniendo al dirigente de la empresa en manos de empresas e intermediarios con intereses contrapuestos y en todo caso con el riesgo de tomar decisiones inadecuadas por no estar en condiciones de valorar la frecuencia y las consecuencias que pueden ocasionar las distintas acciones a su alcance" (31)

La prima a cobrar para un período se fija en función de alguna estimación de la siniestralidad futura, que lógicamente habrá de basarse en la información estadística disponible.

"La información estadística debe recogerse pensando en estar en condiciones de obtener una estimación de la distribución de la cuantía de la siniestralidad" (32)

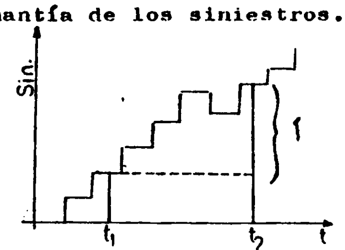
Procede la elaboración del correspondiente modelo. En este punto hemos de destacar uno de amplia aceptación al que podemos denominar modelo de riesgo o de siniestros acumulados, en él se distinguen dos variables aleatorias: la del numero de siniestros y la de la cuantía de cada siniestro , cuyas distribuciones de probabilidad se denominan básicas. A partir de ellas obtendremos la distribución de la siniestralidad total.

En lo que sigue nos proponemos examinar las anteriores distribuciones, destacando cómo bajo distintas hipotesis acerca de la distribución del número de siniestros llegaremos a dos importantes familias de la distribución de la siniestralidad total.

Tambien expondremos las distintas aproximaciones prácticas de la distribución de la siniestralidad total, que han sido desarrolladas en los últimos años para evitar las dificultades que presenta el cálculo directo de la misma.

II.2.1 EL PROCESO DE RIESGO

Es el proceso aleatorio que está asociado al acaecimiento de los siniestros y a sus respectivas cuantías. Puede ser representado gráficamente en la siguiente figura. En el eje de abcisas representaremos el período de observación y en el de ordenadas la cuantía de los siniestros.



Cada salto vertical indica la ocurrencia de un siniestro, siendo su altura la cuantía del mismo. Este proceso es de hecho un proceso aleatorio compuesto en el sentido de que el tiempo de ocurrencia y el número de las mismas es un fenómeno aleatorio, así como la cuantía de cada siniestro.

La altura ξ indica la cuantía total de los siniestros ocurridos durante el intervalo de tiempo (t_1, t_2), para la realización muestral del proceso considerada.

Según lo expuesto, podemos distinguir entre:

-- Un subproceso de llegada. Donde n es la variable aleatoria asociada al número de siniestros que han de ocurrir en $(0,t)$, período de observación, con distribución de probabilidad $P_n(t)$.

-- Un subproceso de cambio. Donde x_i representa la variable aleatoria asociada a la cuantía aleatoria del siniestro i-esimo con función de distribución $V(x) = P(x_i < x)$.

La siniestralidad total en dicho período será la suma de las cuantías aleatorias de un número aleatorio de siniestros.

$$X(t) = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n$$

Según que X(t) dependa o no del tiempo físico (año, mes) el proceso será:

- Evolutivo: en la prática puede venir tipificado, por ejemplo por la depreciación monetaria.

- Estacionario: no depende del tiempo físico.

Haciendo las hipótesis:

- De que se han producido n siniestros.

- De que las variables x_i son independientes del número de siniestros ocurridos (más adelante estudiaremos el caso en que no es así).

La distribución de la cuantía total (0,t) vendrá dada por:

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot V_{(x)}^{n(*)}$$

donde

$P_n(t)$ = probabilidad de que ocurran n siniestros.

$V_{(x)}^{n(*)}$ = probabilidad de que habiendo ocurrido n siniestros alcancen la cuantía X. Es decir la convolución n-sima de V(X).

Las distribuciones $P_n(t)$ y V(X) recibirán el nombre de distribuciones básicas.

II.2.2. DISTRIBUCIONES BASICAS

II.2.2.1. DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD DEL NUMERO DE SINIESTROS

A. Distribución Binomial.

Partiendo del esquema de urnas de Bernoulli. La probabilidad de obtener n bolas blancas en N extracciones con reemplazamiento de una urna que contiene bolas blancas y negras (siendo p la probabilidad de extraer una bola blanca y q = 1-p la de extraer una negra) es:

$$\boxed{P_n = \binom{N}{n} p^n . q^{N-n}}$$

En su aplicación actuarial, nos daría la probabilidad de n siniestros, en un período de observación unitario, donde:

- N representaría el número de exposiciones al riesgo.
- p la probabilidad de siniestro en una exposición.
- q=1-p, la probabilidad de que no ocurra siniestro en la misma.

La función de distribución nos dará la probabilidad de que el número de siniestros no sea superior a n:

$$F(n) = \sum_{r=0}^{n} \binom{N}{r} p^r . q^{N-r}$$

Su función generatriz es $\phi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{rt} . P_r = (q + pe^t)^N$ cuyas derivadas sucesivas en t=0 nos darán los momentos respecto del origen, a partir de los cuales podemos obtener:

Media $\alpha_1 = N.p$ Varianza $\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = N.p.q$

B. Distribución de Poissen simple

En el supuesto que:

- El número de expuestos al riesgo tienda a infinito $N \to \infty$
- La probabilidad de siniestro sea pequeña $p \to 0$

- El nº medio de siniestros en el período de observación unitario sea constante para cualquier período. $N.p = m$

Tendremos $\binom{N}{n} p^n . q^{N-n} \longrightarrow \boxed{\frac{m^n}{n!} e^{-m}}$

función de cuantía que nos da la probabilidad de que se produzcan n siniestros bajo los anteriores supuestos.

Tambien podemos obtener el mismo resultado como un caso particular de la distribución binomial compuesta en la que N es una variable aleatoria que sigue una sistribución de Poisson de parametro λ . El resultado será una distribución de Poisson de parametro λ p.(33).

Definiermos su función de distribución y la generatriz que nos permitirá obtener sus principales parámetros.

$$F(n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{m^r}{r!} e^{-m} \qquad , \qquad \phi(t) = e^{m(e^t - 1)}$$

media $\alpha_1 = m$ varianza $\sigma^2 = m$

Desde el punto de vista actuarial, la distribución de Poisson reposa en las siguientes hipótesis:(34)

1.- <u>Homogeneidad en el tiempo:</u> m es constante para cualquier período de observación, con independencia del tiempo físico.

2.- <u>Efecto de contagio nulo:</u> la distribución de Poisson simple procede del paso al límite de la Binomial, asociada, como hemos visto, al esquema de urnas de Bernoulli: una urna que contiene n bolas blancas y N-n negras, cada vez que se extrae una bola se devuelve a la urna, es decir la probabilidad de la próxima extracción no resulta afectada. En nuestro caso esto equivale a admitir que el acaecimiento de un siniestro no tiene influencia sobre los demás expuestos al riesgo o no modifica la probabilidad del elemento siniestrado.

Por ejemplo, podemos suponer que un accidente de automóvil modifica la propensión de otros automovilistas a tener un accidente y por otra parte tambien la del propio accidentado -(miedo, nervios, precaución etc)

C. **Distribución Binomial Negativa.**

Patiendo del siguiente desarrollo (de aqui el nombre de esta distribución) (35):

$$p^k(1-q)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n}(-q)^n . p^k$$

que será igual a 1 si $p+q = 1$ ($p>0$ y $q>0$). Es decir una variante tal que $P(\xi = n) = \binom{-k}{n}(-q)^n . p^k \qquad n = 0,1,2,\ldots\ldots$

se dice que sigue la distribución binomial negativa

Si hacemos el cambio:

$$p = h/1+h \quad ; \quad q = 1/1+h \quad y \quad k = m.h$$

tendremos:

$$P(\xi = n/m,h) = \binom{-mh}{n}\left(-\frac{1}{1+h}\right)^n\left(\frac{h}{1+h}\right)^{mh}$$

con función generatriz de momentos

$$\phi(t) = \left(1 - \frac{1}{h}(e^t - 1)\right)^{-mh}$$

y a partir de ella podemos obtener su media y varianza

$$\text{media} = m \qquad \text{varianza } \sigma^2 = m\left(1+\frac{1}{h}\right)$$

La distribución Binomial negativa la podemos obtener a partir de la distribución de Polya-Eggenberger cuya característica definitoria es la <u>toma en cuenta del efecto de contagio</u>.

Distribución de Polya-Eggenberger.

Consideremos una urna con a bolas blancas y b bolas negras, su suma es igual a N. Despues de cada extracción se devuelve a la urna junto con la bola extraída c bolas del mismo color. Esto supone que la extracción de la bola de un color supone un incremento la la probabilidad de extraer una bola de ese color (se produce un efecto de contagio).

La probabilidadde que en r extracciones salgan primero n bolas blancas y despues s negras ($r=n+s$) es:

$$A = \frac{a(a+c)(a+2c)\ldots(a+(n-1)c)\cdot b(b+c)(b+2c)\ldots\ldots(b+(s-1)c)}{(a+b)(a+b+c)(a+b+2c)\ldots(a+b+(n-1)c)(a+b+nc)\ldots(a+b+(r-1)c)} =$$

$$= \frac{\frac{a}{c}(\frac{a}{c}+1)(\frac{a}{c}+2)\ldots\ldots\ldots(\frac{a}{c}+(n-1)\cdot\frac{b}{c}(\frac{b}{c}+1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\frac{b}{c}+(s-1)}{\frac{N}{c}(\frac{N}{c}+1)\ldots\ldots\ldots\ldots(\frac{N}{c}+(n-1))(\frac{N}{c}+n)\ldots\ldots\ldots\ldots(\frac{N}{c}+r-1)}$$

llamando $a/N = p$; $b/N = q$; $c/N = \partial$; $N = a+b$

y teniendo en cuenta la indiferencia de las sucesiones de cada n extracciones será:

$$\boxed{P_n = \binom{r}{n}\cdot A = \frac{\binom{\frac{p}{\partial}+n-1}{n}\binom{\frac{q}{\partial}+s-1}{s}}{\binom{\frac{1}{\partial}+r-1}{r}}} \qquad \text{para } 0\leq n\leq r \quad (I)$$

si $\partial=0$ (efecto de contagio nulo) será $c=0$ y tendremos la distribución binomial cuyo límite es la de Poisson,

Distribución Binomial Negativa a través de la de Polya-Eggnberger.

Surge como límite de la distribución de Polya-Eggenberger para sucesos raros y contagio débil.

Las hipótesis son las siguientes:

- $r \longrightarrow \infty$ (nº de expuestos al riesgo tiende a infinito)
- $p \longrightarrow o$ (la probabilidad de siniestro es muy pequeña)

- $\vartheta \longrightarrow 0$ (contagio débil)
- $r.p = m$ (media)
- $r.\vartheta = 1/h$

Pasando al límite (I) obtenemos la distribución Binomial negativa: $P_n = \binom{-mh}{n}\left(\frac{-1}{1+h}\right)^n\left(\frac{h}{1+h}\right)^{m.h}$

con media m y varianza $m(1+1/h)$. La primera es la misma que la distribución de Poisson (distribución de contagio débil, ya que el mismo no afecta a la media).

El efecto de contagio se traduce en una varianza mayor que la que posee la distribución de Poisson, recogido por el parámetro h.

Cuando:

-- h es grande, el efecto de contagio será pequeño, asi como la varianza, Si $h \to \infty$ desaparece el contagio y

$$\binom{-mh}{n}\left(\frac{-1}{1+h}\right)^n\left(\frac{h}{1+h}\right)^{m.h} \xrightarrow[h \to \infty]{} \frac{m^n}{n!}\, e^{-m}$$

de igual forma el límite de la función característica de la Binomial Negativa cuando h tiende a infinito es la función característica de la distribución de Poisson.

-- h es pequeño, el efecto de contagio es grande y por tanto la varianza tambien lo es.

<u>Variaciones en las probabilidades básicas.</u>

La distribución de Poisson supone que el número esperado de siniestros m permanece constante a lo largo del tiempo, esto, en varias ocasiones se encuentra en contradicción con la realidad. Beard, Pentikainen y Pesonen indican en su obra que si algún parámetro supuesto constante, no lo es, los valores obtenidos para la varianza del riesgo son menores, obteniendo resultados optimistas para la solvencia y características similares."Algunos problemas, particularmente aquellos concernientes a cortos períodos de tiempo, por ejemplo un año, pueden ser adecuadamente desarrollados con las anteriores técnicas, aunque un fuerte elemento de contagio pueda influir en los cálculos. Sin embargo, existen algunos, particularmente los relacionados con el cálculo de reservas en los que la más simple teoría resulta poco adecuada y el importante papel jugado por las variaciones en las probabilidades básicas hace necesario adoptar un modelo más complejo".(36)

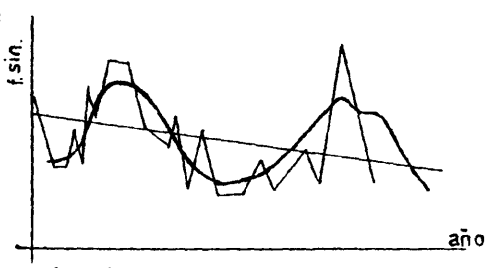
Para elaborar el modelo teórico es importante analizar los diferentes tipos de fluctuación de las probabilidades básicas. Estas se pueden agrupar en tres categorías:

1.- Tendencias.- Surgen como un suave movimiento de cambio en las probabilidades de siniestros, que deben ser propiamente definidas como el cociente del número de siniestros y el de exposiciones al riesgo. Por ejemplo citemos los cambios en las frecuencias de incendios debidos a los nuevos métodos de construcción o uso de otros materiales.

2.- Oscilaciones de período largo.- Un ejemplo de ellas es proporcionado por la asociación de incendios con las condiciones económicas generales. Los resultados de años consecutivos no son independientes y una oscilación puede tener una longitud de varios años. Si por alguna razón, como la estructura del mercado de seguros, existe un lapso de tiempo hasta el incremento de las primas, el recargo de seguridad puede hacerse negativo con importantes repercusiones en el negocio asegurador.

3.- Oscilaciones de período corto.- Pueden ser causadas por cambios meteorológicos o enfermedades epidémicas por ejemplo. Un largo y caluroso verano puede dar lugar a incrementos en el número de incendios afectando los resultados del negocio no-vida.

La siguiente figura nos muestra los diferentes tipos de fluctuaciones:



La ampliación más simple del modelo de Poisson se puede desarrollar considerando las variaciones del tercer tipo, donde podemos suponer que las variaciones entre años son independientes. Sin embargo los dos primeros tipos de variación es necesario tenerlos en cuenta para estudios de largo plazo.

<u>Distribución de Poisson Compuesta.</u>

Puede suceder que el parámetro m de la distribución de Poisson sea función del tiempo m(t). Si los cambios pueden ser explicados por los siguientes factores, todos supuestos definidos funcionalmente: a) cambios en el número de pólizas; b) tendencia secular de la frecuencia de siniestralidad y c) oscilaciones en la frecuencia de siniestralidad; pudiendo ser estimados para un cierto número de años, el modelo de Poisson es aplicable sin modificaciones con un valor de m apropiadamente estimado teniendo en cuenta las variaciones en cuestion.

El problema se complicará si $m(t)$ no es determinístico sino estocástico. Esto puede ser debido a factores aleatorios como las indicadas epidemias o elementos meteorológicos. Para describir el conjunto de estos factores externos, la constante m es reemplazada por una nueva variable $m.\chi$ que represente el número esperado de siniestros en un año, siendo χ una variable aleatoria que representa el efecto de estos factores externos y m una constante aún. El número esperado de siniestros será una variable con media m (si suponemos la media de χ igual a 1)

Tomemos $U(q) = P(\chi \leq q)$, función de distribución de χ. La probabilidad de n siniestros será entonces:

$$\text{(I)} \qquad P_n = \int_0^{\infty} e^{-mq} \frac{(m.q)^n}{n!} dU(q) \quad \text{con parámetro } m$$

De forma más general, podemos suponer que las perturbaciones son función del tiempo $(\chi(t))$. Podemos entonces reemplazar la fórmula anterior por:

$$\text{(II)} \qquad P_n = \int_0^{\infty} e^{-mtq} \frac{(mtq)^n}{n!} dU(t,q)$$

En la práctica se plantea el problema de encontrar la función de distribución $U(q)$.

Las distribuciones definidas en (I) y (II) reciben el -

nombre de Distribución de Poisson Compuesta.

$U(q)$ puede ser obtenida a través de estadisticas de varios años de experiencia, siendo posible estimar cómo los datos se desvían de la variación pura de Poisson y asi tener cierta idea del caracter de $U(q)$. Tambien podemos contrastar distintas funciones conocidas de $U(q)$.

La distribución Binomial Negativa a través de la de Poisson Compuesta.

Supongamos una cartera de H pólizas, compuesta por s clases homogeneas de riesgo (37):

$$H = H_o + H_1 + \dots\dots\dots + H_s$$

Una clase homogenea en el seguro del automovíl sería aquella que reune a los vehiculos con características comunes

Supongamos que el número de siniestros n en el período de observación (0,t) se distribuye con función de probabilidad para una clase homogenea:

$$P(n/tx) = \frac{(t.x)^n}{n!} \cdot e^{-t.x}$$

donde:

t= período de observación (parámetro que ajusta la media x al considerar la intensidad de siniestralidad función del tiempo).

x= media del período de observación unitario. Var.aleatoria.

t.x = media del período de observación (0,t). V. aleatoria.

n = número de siniestros.

Consideremos una de las clases homogeneas H_i. Dentro de la clase, el número de pólizas con r siniestros lo denotaremos por H_{ir} de forma que: $H_i = H_{io} + H_{i1} + \dots\dots$

Una vez fijado el período de observación tendremos que para las pólizas de la clase H_i, la probabilidad de n siniestros viene dada por la distribución anterior con media x. Si este valor de x varía entre los distintos grupos de la clase, entonces, podemos traducir esta heterogeneidad por la distribución de riesgo de x, U(x), (llamada función de estructura de los grupos homogeneos de la clase considerada). La Distribución de Poisson Compuesta tendrá la forma:

$$P_n(t) = \int_0^{\infty} \frac{(t.x)^n}{n!} \quad e^{-t.x} \; dU(x)$$

Si hacemos la hipótesis de que la distribución de estructura es del tipo III de Pearson (gamma), cuya función de densidad es:

$$U'(x) = \frac{h^{mh}}{\Gamma(mh)} \; x^{mh-1}.e^{-hx} \qquad x > 0$$

cuyos parámetros son:

media = m

varianza = m/h

En este caso de la Distribución de Poisson Compuesta se llega a la Binomial Negativa

$$P_n(t) = \int_0^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!} \quad e^{-tx} \; \frac{h^{mh}}{\Gamma(mh)} \; x^{mh-1}.e^{-hx} \; dx =$$

$$= \frac{t^n.h^{mh}}{n!.\ \ (mh)} \quad \int_0^{\infty} x^{n+mh-1}.e^{-x(t+h)} dx =$$

$$= \frac{t^n.h^{mh}}{n!.\Gamma(mh)} \cdot \frac{\Gamma(n+mh)}{(t-h)^{n+mh}} = \frac{\Gamma(n+mh)}{n!.\Gamma(mh)} \; \left(\frac{t}{t+h}\right)^n \left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh} =$$

$$= \binom{n+mh-1}{n} \; \left(\frac{t}{t+h}\right)^n \left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh} = \binom{-mh}{n} \left(\frac{-t}{t+h}\right)^n \left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh}$$

donde $(-1)^n \cdot \binom{-mh}{n} = \binom{n+mh-1}{n}$

$P_n(t)$ será la probabilidad de n siniestros en el período (0,t) cuya función característica será:

$$\psi(u) = (1 - \frac{t}{h}(e^{iu} - 1))^{-mh}$$

a partir de ella los parametros :

media = m.t

varianza = m.t(1 + t/h)

Cuando:

-- $h \to \infty$ y siempre que m sea constante la distribución de estructura U(x) tiende a la distribución causal, es decir: P(x = m) = 1,

Esto significa que se ha perdido el efecto heterogeneidad y que todas las unidades de riesgo tienen la misma media de siniestralidad. En este sentido el parámetro h traduce el grado de heterogeneidad de los riesgos de la clase, siendo el mismo tanto mayor cuanto más pequeño sea h.

Por otra parte, es fácil demostrar que cuando $h \to \infty$ la Binomial Negativa tiende a la de Poisson simple:

$$\lim_{h \to \infty} \psi(u) = \lim_{h \to \infty} (1 - \frac{t}{h} (e^{iu} - 1))^{-mh} =$$

$$= e^{\lim_{h \to \infty} (-mh)(1 - \frac{t}{h}(e^{iu} - 1) - 1)} =$$

$$= e^{mt (e^{iu} - 1)}$$

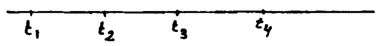
que es la función característica de la distribución de Poisson.

-- $h \to 0$, el grado de heterogeneidad de la clase se hace máximo.

II.22.1.1. El número de siniestros como proceso estocástico

El proceso de Poisson homogeneo.

Consideremos una sucesión en el tiempo de sucesos aleatorios que tienen lugar en momentos t_1, t_2......... (38)



El estudio de fenómenos de este tipo nos llevaría a considerar la ley de probabilidad de una variable aleatoria que nos de el número de siniestros al variar t. Fijemos el intervalo de tiempo t y calculemos $P_n(t)$, esto es, la probabilidad de n sucesos en el intervalo de tiempo t. Haremos las siguientes hipótesis:

1.- La probabilidad de un solo suceso en el tiempo Δt es asintóticamente m Δt, es decir:

$$P_1(\Delta t) = m\,\Delta t + o(\Delta t)$$

en que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Esto significa que la probabilidad no depende más que de la longitud de tiempo considerado y para un Δt breve se considera proporcional al tiempo.

2.- La probabilidad de dos o más sucesos en el tiempo Δt es un infinitésimo de orden superior $o(\Delta t)$, es decir:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - P_0(\Delta t)}{\Delta t} = m$$

como

$$1 - P_0(\Delta t) = P_1(\Delta t) + P_2(\Delta t) + \ldots\ldots\ldots$$

resulta

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_n(t)}{\Delta t} = 0 \qquad \text{para} \quad n > 1$$

3.- El número de sucesos en dos intervalos de tiempo no rampantes son variables aleatorias independientes. Esto es, el número de siniestros acaecidos en $(t, t+\Delta t)$ es independiente del número de sucesos acaecidos en $(0,t)$.(homogeneidad en el espacio).

4.- Las probabilidades $P_n(t)$ son las mismas a lo largo del tiempo, es decir que en dos intervalos (t_1,t_2) y (t_3,t_4) son las mismas si $t_2-t_1=t_4-t_3$. (homogeneidad en el tiempo).

La probabilidad $P_n(t+\Delta t)$ de n sucesos en el tiempo $t+\Delta t$ será el producto de la probabilidad $P_n(t)$ de n sucesos en el tiempo t por la probabilidad $P_o(\Delta t)$ de cero sucesos en el tiempo Δt, más el producto de la probabilidad $P_{n-1}(t)$ de n-1 sucesos en t por la probabilidad $P_1(\Delta t)$de un suceso en el tiempo Δt más la probabilidad $P_{n-2}(t)$ por la probabilidad $P_2(\Delta t)$ etc.

Tenemos pues:

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)P_o(\Delta t) + P_{n-1}(t)P_1(\Delta t) + \dots + P_o(t)P_n(\Delta t)$$

formando la razón de los incrementos y pasando al límite:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = m(P_{n-1}(t) - P_n(t))$$

Para n=0 tenemos que la probabilidad $P_o(t)$ de 0 sucesos en t verificará:

$$\frac{dP_o(t)}{dt} = -m\, P_o(t) \qquad (I)$$

la solución de esta ecuación diferencial con la condición natural $P_o(0) = 1$ es: $P_o(t) = e^{-mt}$

Si ponemos $P_n(t) = \Pi(t)e^{-mt}$, la ecuación (I) se transforma en $\Pi'_n(t) = m\,\Pi_{n-1}(t)$ y como $\Pi_o(t) = 1$

$$\Pi_1'(t) = m \qquad\qquad \Pi_1(t) = mt$$

$$\Pi_2'(t) = m^2 t \qquad\qquad \Pi_2(t) = \frac{m^2 t^2}{2!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\Pi_n'(t) = m^n \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \qquad\qquad \Pi_n(t) = \frac{m^n t^n}{n!}$$

luego $$P_n(t) = e^{-mt} \frac{(mt)^n}{n!}$$

que verifica la condición natural $P_n(o) = o$ para $n>0$. Es la ley de Poisson de parámetro mt.

<u>Las hipótesis del proceso de Poisson y el número de siniestros.</u>

Las hipótesis del epígrafe anterior pueden ser formuladas tambien en la siguiente forma: (39)

1.- Independencia de los incrementos: el número de siniestros en dos intervalos de tiempo disjuntos son independientes.

2.- Estacionareidad de los incrementos: el número de siniestros en un intervalo de tiempo (t_1, t_2) depende sólo de la longitud del intervalo, pero no de t_1.

3.- Exclusión de siniestros múltiples: las probabilidades de que más de un siniestro ocurra al mismo tiempo y de que un número infinito de siniestros ocurran en un intervalo finito son cero.

A partir de ellas llegamos a la distribución de Poisson (40)

En la misma obra se realiza una discusión de dichas hipótesis desde el punto de vista actuarial en el siguiente sentido:

-- La primera condición significa de hecho, que un siniestro no puede dar lugar a otros siniestros. Esto contradice en -

muchos casos a la realidad (pensemos en un incendio). Podemos eliminar esta objeción definiendo, como es costumbre en la práctica reaseguradora, la unidad de riesgo como el conjunto de riesgos cercanos unos a otros, entre los que es posible contagio. Sin embargo, no siempre es posible definir unidades de riesgo de forma que no se produzca contaminación fuera de ella En tal caso la distribución de Poissan no será aplicable sin las apropiadas modificaciones.

-- La segunda condición significa que el flujo conjunto de siniestros es estacionario, esto es, no se produce variación fuera de las normales fluctuaciones aleatorias. Puede ser aceptada a corto plazo.

-- La tercera condición, excluisón de siniestros múltiples, puede parecer en principio no cumplirse (colisión de dos vehiculos, por ejemplo). Podemos sortear esta dificultad definiendo la colisión múltiple como un único siniestro. La exclusión de un infinito número de siniestros no supone una restricción desde el punto de vista de las aplicaciones.

<u>El proceso de Poisson no homogeneo en el tiempo</u>.

Si no se verifica la hipótesis 4 (ver página 88) de homogeneidad en el tiempo. Por ejemplo, si el parámetro m es función del tiempo. Tendremos:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -m(t).(P_n(t) - P_{n-1}(t)) \qquad \text{con}$$

$$\frac{dP_o(t)}{dt} = - m(t).P_o(t) \text{; llamando } \Delta(t) = \int_o^t m(t)dt \text{ tenemos}$$

la solución $\boxed{P_n(t) = e^{-\Delta(t)} \cdot \frac{\Delta(t)^n}{n!}}$

<u>Procesos de contagio. El proceso de Polya-Eggemberger.</u>

Aqui abandonamos la hipotesis de independendencia u homogeneidad en el espacio.

Supondremos que m depende, además de t, del numéro de sucesos (siniestros en este caso) ocurridos con anterioridad, $m_n(t)$:

Se nos planteará el siguiente sistema de ecuaciones:

$$P'_n(t) = -m_n(t).P_n(t) + m_{n-1}(t).P_{n-1}(t)$$

$$P'_o(t) = -m_o(t).P_o(t)$$

cuya solución es:

$$P_n(t) = e^{-\int_o^t m_n(t)\,dt} \int_o^t m_{n-1}(t).P_{n-1}(t)\; e^{\int_o^t m_n(t)dt}\, dt$$

$$P_o(t) = e^{-\int_o^t m_o(t)\,dt}$$

En el caso particular de que:

$m_n(t) = \frac{mh + n}{h + t}$, tenemos el proceso de Polya, siendo por tanto

$$\boxed{P_n(t) = \binom{-mh}{n}\left(\frac{-t}{t+h}\right)^n\left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh}}$$

II.222 DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD DE LA CUANTIA DE UN SINIESTRO.

El modelo matemático que se seguirá estará basado en la consideración de que la distribución es de tipo continuo.

En primer lugar se impone una clasificación de los riesgos en clases homogeneas. Distinguiremos dos casos:

a)Que no existan sumas aseguradas que se puedan relacionar con el valor del interés asegurado. Por ejemplo, el seguro de Responsabilidad Civil con garantía máxima (puede ser ilimitada)

b)Que existan sumas aseguradas susceptibles de relacionarse con el valor del interés asegurado, dando lugar a los casos de infraseguro, seguro pleno y sobreseguro.

Ocurrido un siniestro, da lugar a indemnización que, incluso teniendo en cuenta la aplicación de la regla proporcional) ha de ser tal que:

$$0 \leq X = I/S \leq 1$$

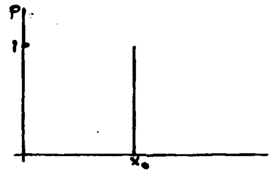
donde:

I = indemnización; S= suma asegurada; X cuantía del siniestro (por unidad). Variable aleatoria cuya distribución se va a considerar.

Despues de la formación de las clases lo más homogeneas posible y de la elabor-ación de la distribución porcentual, de acuerdo con el criterio expuesto anteriormente, se procede a la construcción del oportuno histograma de frecuencias. Habrá que tener en cuenta la presentación del fenómeno para elegir del modo más conveniente la amplitud de los intervalos. El histograma habrá de ajustarse a la distribución más conveniente.

<u>Distribución Causal</u>.

Se caracteriza porque tiene toda su masa de probabilidad acumulada en el punto x_o. Es el modelo de probabilidad de un fenómeno determinista.



Tiene su aplicación actuarial en los seguros de vida (--riesgos monógrados). No se ajusta a los seguros generales, donde es posible el pago de indemnizaciones parciales.

Sus parametros son: media=x_o; varianza= 0

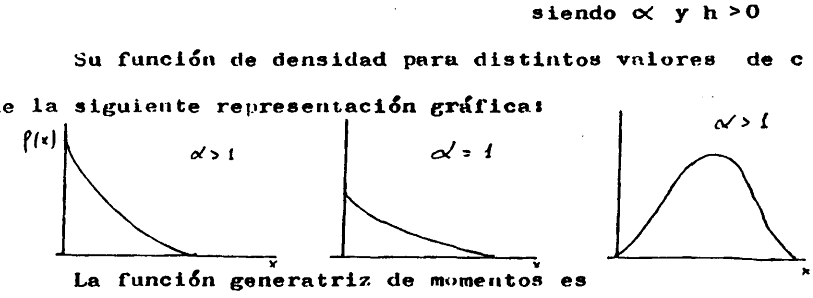
<u>Distribución Gamma</u>.

La distribución Gamma con dos parámetros se define como

$$f(x) = \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \; x^{\alpha-1} \cdot e^{-hx} \qquad \text{para} \quad x > 0$$

siendo α y $h > 0$

Su función de densidad para distintos valores de c tiene la siguiente representación gráfica:



La función generatriz de momentos es

$$\phi(t) = (1 - \frac{t}{h})^{-\alpha}$$

Las derivadas sucesivas de la misma en t=0 nos darán los momentos ordinarios, pero en este caso pueden ser fácilmente obtenidos a partir de la definición de momento:

$$\alpha_k = \int_0^{\infty} x^k \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \; x^{\alpha-1} \cdot e^{-hx} \, dx = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{h^k \, \Gamma(\alpha)}$$

de aquí la media y la varianza son:

$$\alpha_1 = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{h\,\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{h}$$

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{\alpha}{h^2}$$

Estudiemos ahora la convolución n-sima de la distribución Gamma. Más adelante cuando examinemos la distribución del daño total, podremos apreciar la importancia del cálculo de las convoluciones en la distribución de la cuantía de un siniestro.

Para la distribución Gamma la convolución n-sima de la misma (parámetros α_i y h) es una distribución Gamma de parámetros $\sum_i \alpha_i$ y h.

Sean n distribuciones Gamma estocasticamente independientes de parametros α_i $(i=1,2,\ldots,n)$ y sea η la variante suma de ellas.

La función característica de dicha variante suma será:

$$\phi_\eta(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{-\alpha_i} = \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{-\sum_{i}^{n} \alpha_i}$$

como hemos indicado.

__Distribución Logarítmico-Normal.__

Una variable aleatoria ξ sigue una distribución Logarítmico-Normal, si su logaritmo neperiano sigue una distribución Normal para valores positivos de la variable

El fundamento actuarial lo encontramos en el siguiente razonamiento:

Supongamos que el tamaño de un siniestro se debe a diversas causas, siendo X_s el tamaño del siniestro debido a las s -

primeras causas; representando $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ dichas causas o variables impulso

Estableciendo las siguientes hipótesis:

1.- Las variables $\xi_1, \ldots, \xi_s$ son estocásticamente inde - pendientes

2.- Que siendo ΔX_s = el incremento de la cuantía del si - niestro por la incidencia de la causa ξ_{s+1} habiendose producido ya las ξ_i $(i=1,2,\ldots s)$: $\Delta X_s = \xi_{s+1} \cdot X_s$

de donde $\xi_{s+1} = \Delta X_s / X_s$

y si $\sum_{s=0}^{n-1} \xi_{s+1} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\Delta X_s}{X_s}$ donde $\sum_{s=0}^{n-1} \xi_{s+1}$ es la suma de las s - primeras causas.

Pasando al límite:

$$\sum_{\substack{s=0 \\ \Delta \to 0 \\ n \to \infty}}^{n-1} \frac{\Delta X_s}{X_s} = \int_0^{\infty} \frac{dX}{X} = \ln X$$

Al sumar s variables estocásticamente independientes y - al hacer tender n a infinito, damos entrada al Teorema Central del Limite, con lo que la suma $\eta = \sum_{s=0}^{n-1} \xi_{s-1}$ tiende a una dis triiución Normal $N(\mu,\sigma)$.

Pero si η es $N(\mu,\sigma)$ y $\eta = \ln x$ según hemos visto antes, X se dice Logaritmico-Normal.

Siendo la función de densidad de η $N(\mu,\sigma)$, esto es:

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

haciendo el cambio de variable $y = \ln x$; $dy = 1/x \; dx$, la función de densidad de x será:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - u)^2}{2\sigma^2}} \qquad x > 0}$$

y por tanto su función de distribución $F(x) = \int_0^x \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - u)^2}{2\sigma^2}} dx$

Es facil comprobar que su momento genérico respecto al origen es:

$$\alpha_r = e^{r.\mu + \frac{r^2 \sigma^2}{2}}$$

con lo que su media y varianza serán:

$$\text{media} = \alpha_1 = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\text{varianza} = \alpha_2 - \alpha_1^2 = e^{2\mu+\sigma^2} \left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

y la función característica:

$$\phi(t) = e^{\mu it + \frac{(it)^2}{2}}$$

<u>Distribución de Pareto</u>

Es de aplicación en el estudio de la distribución de los ingresos superiores a x_o. Para aplicaciones actuariales consideremos: x_o = siniestro de cuantía mínima.

K = coeficiente de igualdad.

Diremos que una variante sigue la distribución de Pareto si verifica:

$$S(x) = P(\xi > x) = \begin{cases} (x_o/x)^K & \text{para } x > x_o \quad \text{siendo } \begin{matrix} x_o > 0 \\ K > 0 \end{matrix} \\ 0 & \text{para } x \leq x_o \end{cases}$$

Por tanto la función de distribución es:

$$F(x) = P(\xi \leq x) = 1 - \left(\frac{x_o}{x}\right)^K \quad \text{para } x \geq x_o$$

su derivada respecto a x nos dá la función de densidad:

$$f(x) = F'(x) = K.x_o^K.\ x^{-K-1} \quad \text{para } x \geq x_o$$

por fin su media y varianza son:

$$\text{media} = K.x_o/K - 1$$

$$\text{varianza} = K.x_o^2/(K-2)(K-1)^2$$

Distribución por Polinomios Exponenciales.

Se forma por combinación lineal de factores de la forma:

$$\beta_1 e^{-\beta_1 \cdot x}$$

Su función de densidad es por tanto:

$$g_2(x) = \begin{cases} \hat{\alpha}_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x} + \hat{\alpha}_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x} + \cdots + \hat{\alpha}_n \beta_n e^{-\beta_n x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

donde $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \ldots\ldots + \hat{\alpha}_n = 1$

y cumple

$$G(x) = \int_0^\infty g_2(x)\, dx = 1$$

Su primer y segundo momento respecto del origen son:

$$\alpha_1 = \sum_1^k \frac{\hat{\alpha}_r}{\beta_r}$$

$$\alpha_2 = 2\sum_1^k \frac{\hat{\alpha}_r}{\beta_r}$$

y por tanto su media y varianza:

$$\text{media} = \alpha_1 = \sum_1^k \frac{\hat{\alpha}_r}{\beta_r}$$

$$\text{varianza} = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2\sum_1^k \frac{\hat{\alpha}_r}{\beta_r} - \left(\sum_1^k \frac{\hat{\alpha}_r}{\beta_r}\right)^2$$

Siendo su función característica:

$$\psi(t) = \int_0^\infty e^{tx}\, g_2(x)\, dx = \sum_1^k \frac{\hat{\alpha}_r \beta_r}{\beta_r - it}$$

II.2.2.3. DISTRIBUCIÓN DE LA CUANTIA DE n SINIESTROS.

Supongamos que han ocurrido n siniestros.

Si llamamos X al daño total de esos n siniestros, esto es:

$$X = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n$$

siendo x_i variables aleatorias, cada una de las cuales tiene una función de distribución V(x).

Sea G(x/n) la probabilidad de que habiendo sucedido n siniestros su cuantía no alcance el valor x.

Podemos considerar dos casos fundamentalmente:

1.- Que la cuantía de cada daño $(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ sea independiente del número de siniestros. En este caso la distribución de X será:

$$G(x/n) = V_1(x) . V_2(x) \ldots\ldots V_n(x) = V^{n(*)}(x)$$

donde $V^{n(*)}(x)$ es la convolución n-sima de V(x)

Si suponemos que la distribución de la cuantía de un siniestro es, por ejemplo, Gamma de parámetros α y h. Esto es:

$$V'(x) = \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} e^{-hx} \qquad x > 0$$

entonces:

$$G'(x/n) = \frac{h^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} x^{n\alpha - 1} . e^{-hx} \qquad x > 0$$

como ya indicamos al realizar su estudio, cuya media y varianza son:

$$\text{media} = \frac{n\alpha}{h}$$

$$\text{varianza} = \frac{n\alpha}{h^2}$$

2.- Que la cuantía de cada daño sea dependiente del número de siniestros acaecidos. Esto sucede, por ejemplo, en algunas ocasiones en seguro de incendios, cuando la cuantía del daño depende del número de focos. En tal caso se da un efecto de contagio fácil de comprender, ya que si el número de edificios que han sufrido incendio es grande, la cuantía del daño de cada uno de ellos será tambien mayor.

En este caso ya no podemos hablar de convolución n-sima de $V(x)$.

Para nuestro ejemplo, la distribución Gamma, la solución propuesta por Saxer en Versicherumatematik es:

$$G'(x/n) = \frac{(hn^r)^{\alpha n^{2r+1}}}{\rho(\alpha n^{2r+1})} \cdot x^{\alpha n^{2r+1}-1} e^{-hn^r x} \qquad x > 0$$

siendo su función característica:

$$\psi(t) = (1 - \frac{it}{hn^r})^{-\alpha n^{2r+1}}$$

y su media y variaza:

$$\text{media} = \frac{\alpha}{h} n^{r+1}$$

$$\text{varianza} = \frac{n.\alpha}{h^2}$$

El modelo traduce el efecto de contagio sólo en la media, pues la varianza es igual a la del primer supuesto en el que la cuantía del daño es independiente del número de siniestros.

Cuando r=o tambien coincide la media.

II.2.3 DISTRIBUCION DEL DAÑO TOTAL

Es la distribución de probabilidad de la cuantía del daño total sufrido por la cartera del ente asegurador durante el período considerado de tiempo. Sean:

-- $G(x/n)$= la probabilidad de que ocurridos n siniestros la cuantía del daño sea menor o igual que x.

-- $P_n(t)$= la probabilidad de que ocurran n siniestros en (0,t).

La distribución del daño total en (0,t) es:

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t).G(x/n)$$

que en el caso de que la cuantía de los siniestros sea independiente del número de los mismos será:

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t).V^{n(*)}(x)$$

En lo que sigue estudiaremos la distribución del daño total, para lo cual distinguiremos en los siguientes casos:

<u>La distribución del nº de siniestros es de Poisson simple</u>

En este caso la distribución del daño total recibirá el nombre de "<u>Distribución de Poisson Generalizada</u>".

Consideraremos, como es habitual en la Teoría del Riesgo Colectivo, un tiempo operacional t, definido como el número medio de siniestros en el tiempo físico (0,t). Por ejemplo t= 200 equivale a dos años para una entidad que tenga 100 siniestros de media al año.

La distribución de Poisson será en este caso: $P_n(t)=\frac{e^{-t}\,t^n}{n!}$

y la distribución del daño total

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t}.t^n}{n!} V^{n(*)}(x).$$

Examinemos los elementos definitorios de esta distribución. Sea

$$c_k = \int_0^{\infty} x^k \, dV(x)$$

el momento de orden k con relación al origen de la distribución de la cuantía de un siniestro V(x).

La media de la distribución del daño total es:

$$\underline{E(X)} = \int_0^{\infty} x \, dF(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t}.t^n}{n!} \int_0^{\infty} x \, dV^{n(*)}(x) = \frac{e^{-t}t^n}{n!}.n.c_1 = \underline{t.c_1}$$

Siendo el momento de orden dos respecto del origen de la distribución del daño total : $\int_0^{\infty} x^2 dF(x,t) = t.c_2 - (t.c_1)^2$

la varianza de F(x,t) es

$$\underline{\sigma^2} = t.c_2 - (t.c_1)^2 - (t.c_1)^2 = \underline{t.c_2}$$

La función característica de F(x,t) es:

$$\phi(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta x} dF(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t}t^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta x} \, dV^{n(*)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-t}t^n}{n!} \psi^n(\theta)$$

$$= e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\psi(\theta))^n}{n!} = \boxed{e^{t(\psi(\theta) - 1)}} \text{, donde } \psi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} \, dV(x)$$

es la funcion característica de la cuantía de un siniestro.

Variaciones en las probabilidades básicas.

Enlazando con lo expuesto en el epigrafe II.2.2.1 , si U(q) = =P($\chi \leq$ q) es la función de distribución de χ , variable aleatoria que representa el efecto de determinados factores sobre la distribución del número de siniestros, tenemos que la probabilidad de n siniestros viene dada por $P_n = \int_0^{\infty} e^{-mq} \frac{(mq)^n}{n!} dU(q)$

En este caso la distribución del daño total (la definiremos para un período unitario de tiempo) es:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n . V^{n(*)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-mq} \frac{(mq)^n}{n!} dU(q) \right) . V^{n(*)}(x)$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-mq} \frac{(mq)^n}{n!} V^{n(*)}(x) \right) dU(q) = \int_0^{\infty} F_{mq}(x) \, dU(q)$$

donde F_{mq} es la distribución de Poisson Generalizada con un número medio de siniestros mq. Podemos observar que F(x) es, en alguna forma, la media ponderada de todas las posibles distribuciones de Poisson Generalizadas con la misma distribución de la cuantía de un siniestro V(x), siendo los pesos para cada valor de mq, las probabilidades de ocurrencia del número esperado de siniestros.

Para calcular la media y la varianza de F(x), necesitamos formular los momentos respecto al origen de la misma.

$$\tilde{\beta}_r = \int_0^\infty x^r \, dF(x) = \int_0^\infty x^r \, d_x \left(\int_0^\infty F_{mq}(x) \, d_q U(q) \right) =$$
$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty x^r \, d_x F_{mq}(x) \right) d_q U(q) = \int_0^\infty \beta_r(mq) \, d_q U(q)$$

donde $\beta_r(m)$ es el momento respecto al origen de la Distribución de Poisson Geeneralizada. De lo anterior:

$$\tilde{\beta}_1 = \text{media} = P = c_1 mq \, dU(q) = m.c_1$$

$$\text{varianza} = \int_0^\infty (x-P)^2 \, dF(x) = \tilde{\beta}_2 - P^2 =$$
$$= \int_0^\infty mqc_2 \, dU(q) + \int_0^\infty m^2 c_1^2 q^2 \, dU(q) - P^2$$
$$= mc_2 + m^2 c_1^2 \left(\int_0^\infty q^2 \, dU(q) - 1 \right) =$$
$$= mc_2 + m^2 c_1^2 \, V_q$$

donde V_q es la varianza de χ (si su media vale 1). El primer término de la fórmula de la varianza es igual a la varianza de la función de Poisson Generalizada. El segundo término nos indica la fluctuación aleatoria de las probabilidades básicas.

Podemos observar como la fluctuación aleatoria ordinaria del número de siniestros y del tamaño de un siniestro predomina para pequeñas compañías, mientras que ara las de gran tama ño, la posición se invierte.

La relación anterior la podemos expresar tambien como:

$$\text{Varianza} = mc_1^2 + m(c_2 - c_1^2) + m^2c_1^2\, V_q =$$

$$= c_1^2 . V_n + mV_x + m^2c_1^2 . V_q$$

donde V_x es la varianza de la distribución del tamaño de un siniestro. El primer término, muestra la influencia en la varianza total de la varianza V_n del número de siniestros (función elemental de Poisson), el segundo nos indica la influencia del tamaño del siniestro y el terc-ero la de la variación de las probabilidades básicas.

La función característica será:

$$\phi(\theta) = \int_0^\infty e^{mq(\psi(\theta) - 1)}\, dU(q)$$

<u>La distribución del número de siniestros es Binomial Negativa.</u>

Este sería un caso particular del general estudiado en el epígrafe anterior, si U(q) fuese del tipo Gamma.

Realizaremos su estudio trabajando con tiempo operacional.

La distribución del daño total será:

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-h}{n} \left(\frac{-t}{t+h}\right)^n \left(\frac{h}{t+h}\right)^h . V^{n*}(x)$$

cuyas media, varianza y función característica son:

$$\text{media} = t.c_1$$

$$\text{varianza} = t.c_2 + \frac{(t.c_1)^2}{h}$$

$$\int e^{i\theta x} dF(x,t) = (1 - \frac{t}{h}\,(\psi(\theta) - 1))^{-h}$$

$$\text{donde } \psi(\theta) = \int_0^\infty e^{i\theta x}\, dV(x)$$

El efecto de contagio se traduce en esta distribución en su varianza y función característica a través del parámetro h.

Al tender h a infinito, es fácil comprobar que tanto la varianza como la función característica de la Binomial - negativa tienden a la varianza y la función característica de la distribución de Poisson.

II.2.4. APROXIMACIONES DE LA DISTRIBUCION DEL DAÑO TOTAL

La importancia de la distribución del daño total dentro de la Teoría del Riesgo Colectivo y la dificultad de su cálculo directo hacen necesario disponer de aproximaciones prácticas de la misma. Nos proponemos examinar las más importantes.

A. Aproximación Normal.

Es la aproximación clásica de la distribución del daño total y una de las que más frecuentemente han sido aplicadas. Si la cuantía de los siniestros son variables aleatorias estocásticamente independientes, el Teorema Central del Límite nos permite afirmar que $F(x,t)$ tiende a una distribución Normal cuando t tiende a infinito. Esto es:

$$F(x,t) = \phi\left(\frac{x-P}{\sigma}\right) \qquad \phi \rightarrow N(0,1)$$

en el caso de la distribución de Poisson generalizada tenemos $P = t.c_1$ y $\sigma = \sqrt{t.c_2}$.

Más adelante analizaremos la bondad de esta aproximación, que no es más que un caso particular del desarrollo de Edgeworth

B. Serie de Edgeworth.

Viene dada por la expresión:

$$F(x,t) = \phi\left(\frac{x-P}{\sigma}\right) - \frac{c_3}{6\sqrt{t}\,c_2^{3/2}}\,\phi^{(3)}\left(\frac{x-P}{\sigma}\right) + \frac{c_4}{24tc_2^2}\,\phi^{(4)}\left(\frac{x-P}{\sigma}\right) - \frac{c_3^2}{72tc_2^2}\,\phi^{(6)}\left(\frac{x-P}{\sigma}\right) + 0(t^{-3/2})$$

Una demostración de este desarrollo podemos encontrarla en el apendice B de la obra de referencia.

$\phi^{(k)}$ es la derivada k-esima de ϕ, c_r y t son el momento de orden r respecto del origen de $V(x)$ y t el número medio de siniestros en el período $(0,t)$

Es importante tener en cuenta la naturaleza semiconvergente del anterior desarrollo, en el sentido de que no se obtiene, para un t fijo, una mejor aproximación simplemente incrementando el número de términos. Ahora bien, tomando un número apropiado de los mismos, el desarrollo de Edgeworth da buenos resultados para valores próximos a la media hasta aproximadamente más menos dos veces la desviación típica; fuede este intervalo los resultados empeoran rapida ente.

C. Aproximación NP (Normal Power)

Desde el punto de vista de la Teoría del Riesgo, el intervalo dentro del cual la anterior aproximación es aceptable, presenta el inconveniente de que los problemas de mayor interés se presentan para valores más lejanos de esos dos puntos de la desviación tipica. Por esta razón es necesario mejorar dicho desarrollo. El método de Esscher da buenos resultados en este sentido, aunque como ya veremos necesita unos cálculos complicados. Sin embargo, otro método que con unos calculos sencillos da unos resultados ligeramente peores es el NP.

La aproximación Normal opera por medio de una variable aleatoria normalizada η que posee media 0 y desviación típica 1 La cuantia total de siniestros es reemplazada por la variable aleatoria $t.c_1 + \eta\sqrt{t.c_2}$ que nos lleva a la ecuación básica que define la aproximación Normal. La idea es modificar η por medio del desarollo $\delta = a_o + a_1\eta + a_2\eta + \ldots\ldots(I)$ en el que los coeficientes a_i se determinaran por medio del desarrollo de Edgeworth.

Mientras que la aproximación Normal fue establecida sobre la base de la ecuación $1 - \mathcal{E} = \emptyset(y)^{(II)}$ dando la probabilidad $\eta \leq y$, la variable modificada obedecerá a la ecuación (recorde mos el desarrollo de Edgeworth) :

$$1-\varepsilon = \phi(y+\Delta y) - \frac{1}{6}\gamma_1\phi^{(3)}(y+\Delta y) + \frac{1}{24}\gamma_2\phi^{(4)}(y+\Delta y) - \frac{1}{72}\gamma_1^2\phi^{(6)}(y+\Delta y) + O(t^{-3/2}) \quad \text{(II)}$$

donde γ_1 y γ_2 son los coeficientes de asimetría y curtosis de

Los coeficientes de (I) se determinan sustituyendo en (III):

$$y+\Delta y = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots\ldots$$

e igualando los términos de la derecha de (II) y (III).

Para encontrar los coeficientes a_r, hemos de determinar

Δy (41)

$$\Delta y = \frac{1}{6}\gamma_1(y^2-1) + \frac{1}{24}\gamma_2(y^3-3y) - \frac{1}{36}\gamma_1^2(2y^3-5y) + O(t^{-3/2})$$

con lo cual

$$\frac{x-P}{\sqrt{t.c_2}} = y+\Delta y = y + (1/6)\gamma_1(y^2-1) + (1/24)\gamma_2(y^3-3y) - (1/36)\gamma_1^2(2y^3-5y) + O(t^{-3/2}) \quad \text{(IV)}$$

que no es más difícil de manejar numéricamente que la aproximación Normal, la cual es otra vez un caso particular, el primer término del desarrollo. Si, por ejemplo, (IV) es tomado como

$$\frac{x-P}{\sqrt{t.c_2}} = y + (1/6)\gamma_1(y^2-1) \quad \text{(V)}$$

y dado $1 - F(x,t) = \varepsilon$, el valor de y lo encontramos en las tablas de la Normal, usando la ecuación $1-\varepsilon = \phi(y)$, siendo x calculado a partir de (V). Si, en cambio, x está dado, entonces y lo hallaremos en (V) y el valor de ε correspondiente de la tabla:

$$F(x,t) = \phi\left[\sqrt{\left(\frac{9}{\gamma_1} + 1 + \frac{6(x-P)}{\sqrt{t.c_2}}\right)} - \frac{3}{\gamma_1}\right]$$

válido cuando el radicando no es negativo.

Esta aproximación da mejores resultados que el desarrollo de Edgeworth para valores lejanos a la media.

D. La aproximación de Esscher

Las aproximaciones normales no dan buenos resultados en algunos casos, por ejemplo, en aquellos en que la distribución de la cuantía de un siniestro V(x) sea muy heterogenea y el numero de siniestros m pequeño. La aproximación de Esscher los - consigue, aunque hemos de señalar el inconveniente de su gran complicación matemática.

El metodo de Esscher es una de las más importantes herramientas para el calculo de los valores de la distribución de - Poisson Generalizada. Su fórmula hace uso de la distribución - Normal o de los primeros terminos del desarrollo de Edgeworth, siendo su idea básica la de transtormar la distribución de -- Poisson Generalizada de tal forma que el valor requerido de x es trasladado al area en la cual el ajuste de la aproximación normal es bueno. La transformación referida es:

$$\bar{V}(x) = \frac{1}{\beta_o}\int_o^x e^{hy}\, dV(y) \qquad\qquad \bar{m} = m\beta_o$$

donde la constante β_o es fijada por la condición $\bar{V}(\infty) = 1$ que - hace $\bar{V}(x)$ función de distribución. h es una constante auxiliar cuyo valor sera fijado más adelante..

Definimos un conjunto de constantes $\beta_k = \int_o^\infty y^k\, e^{hy}\, dV(y)$, β_o se obtendrá evidentemente haciendo k=o. La distribución de Poisson Generalizada $\bar{F}(x)$ con distribución del tamaño de un si- - niestro $\bar{V}(x)$ y número medio de siniestros $\bar{m}$ será calculada en los términos de la distribución original F(x). Para obtener la convolución n-sima de $\bar{V}$ haremos: $dV^{k(*)}(x) = \beta_o^k\, e^{hy}\, d\bar{V}^{k(*)}(x)$

de aqui: (I) $dF(x) = e^{-m-m\beta_o-hx} \cdot d\bar{F}(x)$ ya que :

$$dF(x)=\sum_{o}^{\infty}\frac{e^{-m}m^{n}}{n!}\cdot dV^{n(*)}(x) = e^{-m+m\beta_o-hx}\, d\sum_{o}^{\infty}\frac{e^{-m}m^{n}}{n!}\bar{V}^{n(*)}(x)$$

donde la media de $\bar{V}$ es $\bar{1}=\beta_1/\beta_o$ y la de $\bar{F}$, $m\bar{1} = m\beta_1$. La desviación tipica de $\bar{F}$ es igual a $\sqrt{m\beta_1/\beta_o} = \sqrt{m\beta_2}$. Apliquemos el desarrollo de Edgeworth a la función de distribución. Ya que $\bar{m}\alpha_k = m\beta_k$, (I) da:

$$\text{(II)} \qquad dF(x)=e^{-m+m\beta_o-hx}(d_x\sum c_k\ \phi^{(k)})z) - dR)$$

donde $z=(x - m\beta_1)/\sqrt{(m\beta_2)}$; R el resto y los c_k son los coeficientes del desarrollo de Edgeworth. Un estudio más profundo nos indica que el valor absoluto del cociente entre el último y el anterior término entre paréntesis tiende a infinito con x. El ajuste $dF \simeq d(\bar{F} - R)$ es el mejor en la vecindad de la media z=0 ó $x= m\beta_1$. Hay siempre algún valor en el intervalo $(m\beta_1-\sqrt{m\beta_2}\ ,\ m\beta_1+\sqrt{m\beta_2})$, donde el ajuste es exacto, sin embargo, no es posible dar una regla general en cuando a que lugar de este intervalo el ajuste es mejor. Es aconsejable tomarlo de tal forma que el punto x para el cual requerimos el valor de F(x), sea la media de $\bar{F}$. Esto es posible ya que la constante h no ha sido fijada todavía.

$$x = m\beta_1 = m\int_o^{\infty} ye^{hy}\ dV(y)$$

Entoces evidentemente si $x < m.1$ ($\geq m.1$), $h<0$ (≥ 0). La intención es omitir el término dR de (II) e integrar. El resultado de la misma es:

$$1-F(x) = e^{-m+m\beta_o-mh\beta_1}\int_o^{\infty} e^{-hz\sqrt{m\beta_2}}\ d_z\sum c_k\phi^{(k)}(z)$$

Para cálculos númericos consideraremos las llamadas funciones de Esscher:

$$E_k(u) = \int_o^{\infty} e^{-uz}\ d\phi^{(k)}(z)$$

Estas funciones se obtienen facilmente de la fórmula de recurrencia:

$$E_k(u) = \left[e^{-uz}\phi^{(k)}(z) \right]_0^\infty + u\int_0^\infty e^{-uz} d\phi^{(k-1)}(z)$$

$$= -\phi^{(k)}(0) + uE_{k-1}(u)$$

partiendo de

$$E_o(u) = \int_0^\infty e^{-uz} d\phi(z) = \frac{1-\phi(u)}{\sqrt{2\pi}\ \phi'(u)} = \frac{A(u)}{\sqrt{2\pi}}$$

Las primeras funciones de Esscher son:

$$\sqrt{2\pi}\ E_1(u) = uA(u) - 1$$

$$\sqrt{2\pi}\ E_2(u) = u^2A(u) - 1$$

$$\sqrt{2\pi}\ E_3(u) = u^3A(u) - u^2 + 1$$

Usando las funciones el resultado es:

$$1 - F(x) = e^{-mw}\ (E_o(u) + c_3E_3(u) + \ldots\ldots + \text{Resto})$$

donde

$$u = h\sqrt{m}/\beta_2$$

$$w = 1 - \beta_o + h/\beta_1$$

El valor concreto de los coeficientes c_k se derivan del desarrollo de Edgeworth. En la práctica es raro necesitar más de c_3, que puede ser expresado como:

$$c_3 = -\frac{\beta_3}{6\beta_2\sqrt{m}\,\beta_2}$$

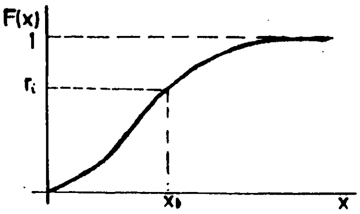
E. **El Método de Montecarlo**

Hace uso de los llamados números aleatorios, que podemos definir en la siguiente forma: sea una variable aleatoria , uniformemente distribuida en el intervalo (0,1). Su función de distribución es

$$R(r) = \begin{cases} 0 & \text{para } r \leq 0 \\ r & \text{para } 0 < r \leq 1 \\ 1 & \text{para } r > 1 \end{cases}$$

Una muestra de s valores de es tomada, de forma que obtendremos una secuencia de números $(r_1, \ldots, r_s)$. Estos son los llamados números aleatorios. Cada valor del intervalo (redondeado a un cierto número de decimales) tiene exactamente la misma probabilidad de aparecer en dicha secuencia. Existen tablas de números aleatorios, aunque pueden ser facilmente generados por un comp-utador electrónico.

A partir de los r_i numeros aleatorios uniformemente distribuidos podemos obtener secuencias de números aleatorios que son muestras de una variable aleatoria con alguna otra distribución de probabilidad. Supongamos dada la distribución F(x) Cada número aleatorio es proyectado por medio de esta distribución, como se muestra en la siguiente figura:



El resultado x_i es la raiz de la ecuación $r_i = F(x_i)$. En otras palabras, el procedimiento transforma una muestra aleatoria de la distribución R(r) en una muestra aleatoria de la distribución F(x). Como ejemplo, veamos cómo calcularíamos la convolución de dos funciones de distribución $F_1(X)$ y $F_2(X)$, esto es, trataremos de encontrar la función de distribución de la variable $\xi = \xi_1 + \xi_2$ cuya notación es $F = F_1(x) * F_2(x)$. Para ello generamos s pares de números aleatorios $(r_{11}, r_{21}; \ldots; r_{1s} r_{2s})$ Cada número r_{1i} es transformado, como antes indicamos, en otro x_{1i}, valor aleatorio de ξ_1. De igual forma los r_{2i} son transfromados mediante F_2 en x_{2i}. La suma $x_i = x_{1i} + x_{2i}$ nos da la secuencia $(x_1, x_2 \ldots, x_s)$ que es una muestra aleatoria distribuida según la función $F = F_1 * F_2$. Para obtener los valores numéricos de la función de distribución, o más precisamente, una estimación, los x_i son ordenados de acuerdo a su magnitud y llamando k_x al número de todos los x_i que son menores o igual que x, obtenemos la estimación $F(x) = k_s/s$.

Hemos de darnos cuenta de que el método de simuladión, es de hecho, equivalente a un método de observación de los valores que aparecen en algún experimento y construir con ellos la estimación estadística de la función de distribución. El error dependerá del número s. Supongamos que el valor real de $F(x)$ es p, entonces la función de distribución de k_s/s es binomial en la que la desviación típica es $\sigma = \sqrt{p.(1-p)/s} \leq \frac{1}{2}\sqrt{1/s}$. Podemos decir que con una confianza del 99% en valor observado se encontrará entre $\pm 2{,}576\sigma$ de p.

Estudiemos el calculo de la distribución de Poisson Generalizada. Para ello, un número aleatorio correspondiente al número de siniestros ha de ser generado para cada prueba, y otro para la correspondiente cuantía del siniestro. En principio es posibe proceder en la siguiente forma: sea v el número aleatorio de siniestros y ξ el tamaño aleatorio de un siniestro. La función de distribución de estas dos variables aleatorias son:

$$P(N) = \sum_{0}^{\infty} \frac{e^{-m}\, m^k}{k!} \qquad y \qquad V(x)$$

Generemos un número aleatorio r_{1o}, sea N_1 la solución de la ecuación $r_{1o}=P(N)$, o en otras palabras, llamando P^{-1} a la función inversa de $P(N)$, $N_1= P^{-1}(r_{1o})$. Generemos N_1 números aleatorios $r_{11},r_{12},\ldots,r_{1N_1}$ que nos darán $z_{1i}=V^{-1}(r_{1i})$. Con lo que tendremos:

$$x_1 = \sum_{i=1}^{N_1} z_{1i}$$

que puede ser considerado como el primer miembro de una muestra de variables aleatorias cuya función de distribución es $F(x)$, esto es, la cuantia total de siniestros simulada de la compañía. El procedimiento ha de ser repetido un gran número de veces (quizá 10.000), aunque puede ser racionalizado si las convoluciones son calculadas antes de la simulación. Si un entero N es escrito como una suma de enteros $h_i > 0$, entonces:

$$V^{N*}= V^{h_1*} * V^{h_2*} * \ldots\ldots$$

en particular si N es escrito como un número binario $N= \Sigma a_k.2^k$ $(a_k=0$ ó $1)$. La representación es $V^{N*}= \prod_{a_k=1} V^{2^k*}$.

Por tanto como $2^k = 2^{k-1} + 2^{k-1}$, las convoluciones V^{2^k*} son calculadas de antemano por medio de la formula de recurrencia: $V^{2^k*} = V^{2^{k-1}*} * V^{2^{k-1}*}$ hasta un k suficientemente grande. El proceso continua generando un número aleatorio r_{1o}, siendo el número de siniestrs $N_1=P^{-1}(r_{1o})$. Entonces N_1 es expresado como un número binario $\sum a_k.2^k$, y son generados los números aleatorios $r_{11},r_{12},\ldots\ldots, r_{1\Sigma a_k}$. Finalmente los números:

$$z_{1k} = (V^{2^k*})^{-1} (r_{1i})$$

son derivados de aquellos valores de k para los cuales $a_k = 1$,- partiendo del k más pequeño. Entonces:

$$x_1 = \sum_{a_k=1} z_{1k}$$

nos da el primer punto muestral de la distribución $F(x)$.

En este caso si son requeridos 10.000 puntos muestrales, solamente será necesario fenerar $10.000(\frac{1}{2}\log n-1)$ números aleatorios en lugar de $10.000(n-1)$ necesarios aplicando el primer - metodo.

F. <u>Método de inversión de la función característica.</u>

De acuerdo con el teorema de inversión de Fourrier, conocida la función característica podemos obtener la función de - distribución. La relación es la siguiente:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{+T} \frac{1 - e^{itx}}{it} \phi(t)\, dt - \tfrac{1}{2}F(0)$$

Si m y $V(x)$ son conocidas, es suficiente calcular la función característica de la distribución de la cuantía de un siniestro $\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dV(x)$, y a partir de ella la función característica de la del daño total (por ejemplo cuanto P_n es de Poisson);

$$\phi(t) = e^{m(\psi(t) - 1)}$$

y por fin calcular la primera de las realciones nos da $F(x)$.

El principal problema de este m'etodo es csicular T de - forma que nos de resultados aceptables.

El método de inversión de la fmcipon característica puede ser útil como un medio por el cual otros métodos de aproximación pueden probarse para distintos m y diferentes $V(x)$.

II.3. EL SISTEMA DE ESTABILIDAD.

Nos referiremos unicamente al negocio de seguro o de riesgo (primas-siniestros).

Para el mismo, la Teoría del Riesgo Colectivo nos proporciona un modelo ampliamente aceptado y desarrollado, que integra sus elementos básicos: recargo de seguridad, reaseguro y reservas de estabilidad. Estos constituyen las tres variables de decisión del sistema de estabilidad cuyo objeto es evitar que la probabilidad de ruina (probabilidad de que la siniestralidad supere la suma de primas y reservas) supere un valor predeterminado para unos precios equitativos.

Es conveniente realizar las siguientes matizaciones:

1.- La estabilidad de la empresa aseguradora no depende solamente, aunque si en forma importante, de la del negocio de seguro. La influencia del resto de las actividades en la empresa debe ser tenido en cuenta convenientemente.

2.- Las decisiones sobre el recargo de seguridad, reaseguro y reservas de estabilidad han de poseer como objetivo último la consecución de los fines generales de la empresa, siendo la estabilidad de la cartera de seguros uno de ellos.

3.- Desde la realidad económica puede formularse una importante crítica a la Teoría del Riesgo Colectivo:

Supone la posibilidad de un incremento ilimitado de las reservas, no teniendo en cuenta el hecho de que una parte del beneficio sea repartido en forma de dividendos, práctica habitual en una economía de mercado.

II.3.1. LA ESTABILIDAD DE LA EMPRESA ASEGURADORA

Teniendo en cuenta que las operaciones de seguro son de naturaleza aleatoria, surgen desviaciones del mismo carácter y por tanto el problema de la estabilidad del ente asegurador en cuyo seno se realizan las mismas. Se trata de analizar estas desviaciones y proporcionar medidas para neutralizar sus efectos. Estas medidas han de ser suficientes para mantener el equilibrio del ente asegurador compatible con un precio equitativo del seguro. Se trata de compatiblizar el principio de equidad con el de estabilidad.

a) Principio de división del riesgo.- Nos dice que para evitar fluctuaciones aleatorias en una cartera y en igualdad de condiciones, es preferible un número grande de pequeñas operaciones que uno pequeño de elevada cuantía.

Una demostración elemental considera la varianza de n operaciones con capitales $C_1, C_2, \ldots, C_n$; tal que la probabilidad p de siniestro sea la misma para todas ellas:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 . p . q = p.q. \sum_{i=1}^{n} C_i^2$$

cuyo valor mínimo,(mínim. σ^2), para $\sum_{i=1}^{n} C_i^2 = K$ se consigue cuando, $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = K/n$, los capitales asegurados son iguales.

Para demostralo formemos la función auxiliar de Lagrnge

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 . p . q - 2 . \mu . p . q \ (\sum_{i=1}^{n} C_i - K)$$

$$\phi = n . C_i^2 . p . q - 2 . \mu . p . q \ (n C_i - K)$$

para que se obtenga un mínimo $\frac{\partial \phi}{\partial C_i} = 2 . C_i . n . p . q - 2 . \mu . p . q = 0$

de donde $2 . C_i - 2 . \mu = 0$; $\mu = C_i$

como $C_i = K = n . \mu$; $\mu = K/n$

por tanto $C_i = K/n$ como queríamos demostrar.

b) Ley de los grandes números.- nos proporciona otra posible solución al problema. Para el seguro de vida la podemos expresar como: para un gran número de asegurados de la misma edad, la probabilidad de una diferencia entre la frecuencia relativa de mortalidad y la probabilidad aceptada será arbitrariamente pequeña. Es decir, si P es la probabilidad de muerte y ν_n la frecuencia relativa de muerte

$$Pr(|\nu_n - P|) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

El primer inconveniente de esta solución radica en que se aplica el esquema de Bernoulli (y por tanto el proceso de Poisson) donde por haber ausencia de contagio, no se adapta en muchos casos a los seguros generales. En estos, ya hemos visto, surge la distribución Binomial negativa cuya dispersión tiene un sumando primario que no disminuye al aumentar la cartera. Otro inconveniente de esta solución es que deja en pie la cuestión fundamental de saber si tales fluctuaciones pueden hacer peligrar eventualmente la estabilidad del ente asegurador, asi como proporcionar medi-das para neutralizar estas fluctuaciones

c) Alteración del principio de equivalencia.- de acuerdo con el mismo, la prima debería ser igual al valor medio de los pagos por siniestros.

Como indica K.Borch (42): si una operación de seguro es ofrecida al público a una prima determinada por el principio de equivalencia, el beneficio esperado del negocio sería cero.

Si una compañía de seguros pierde constantemente en sus operaciones, más tarde o más temprano quedará inhabilitada para cumplir sus obligaciones por operaciones de seguro. Esto -

significa naturalmente que los contratos de seguro ya no sirven para su verdadero fin, proporcionar a los asegurados protección casi absoluta.

Estas consideraciones indican que la prima debe ser más alta que la proporcionada por el principio de equivalencia.

Siendo P la prima a cobrar y ξ la variable asociada a la siniestralidad; el principio de equivalencia nos dice que $P = E(\xi)$. La alteración del principio de equivalencia supondría cobrar una prima P_1 tal que $P_1 > E(\xi)$, es decir, con un recargo de seguridad de forma que $P_1 = P(1+\lambda)$. En este caso el beneficio esperado sería positivo. Como continúa diciendo Borch:"Esta idea tienen probablemente su origen en la Teoría Económica, en la cual se sustenta que los beneficios esperados tendrán que ser tanto mayores cuanto mayores sean los riesgos Sin embargo, hasta ahora, la Teoría Económica no ha tenido grandes éxitos al definir el concepto de riesgo y encontrar sus relaciones con los beneficios esperados. Más adelante profundizaremos en este tema, pero en principio queda en pie, el problema de saber cual ha de ser la cuantía del recargo.

Podríamos tambien tomar la probabilidad de ruina como punto de partida. Así, consideraremos la probabilidad de que la compañía sufra una pérdida si el contrato es ofrecido a una prima determinada. En este momento entraríamos en las teorías del riesgo, que en este mismo capítulo estudiaremos con más detalle, poniendo un mayor énfasis en la que posee un mayor atractivo teórico: la Teoría del Riesgo Colectivo, cuyo modelo nos servirá de base al estudio de la estabilidad de la empresa.

Varias criticas ha recibido esta Teoría, destaquemos las de De Finetti y Borch, por ejmplo, este último dice al respecto:"Esta teoría es por muchos lados atractiva, pero ha encontrado pocas aplicaciones en la práctica. El motivo,según mi opinión es que la teoría no se amolda a los problemas reales como los ven los actuarios que ejercen su profesión, o cómo ellos lo sienten" (43)

Examinemos una solución que este autor propone al problema que nos ocupa en base a un criterio económico:

Si una compañía de seguros ha suscrito n contratos de seguro a una prima x, el resultado puede estar entre dos límites:

-- Una pérdida de n(1 - x), si todos los contratos tienen siniestro.

-- Un beneficio de n.x, si no hay siniestro alguno.

En general el beneficio z tendrá una distribución de probabilidad determinada por $P(z \leq n.x - y) = \sum_{j>y} \binom{n}{j} p^j . (1 - p)^{n-j}$ siendo p la probabilidad de siniestro y n depende de x.

De estas consideraciones se desprende que la decisión de ofrecer una operación de seguro al público a una prima x dará a la compañía un beneficio, que es una variable aleatoria, cuya distribución de probabilidad dependerá de x, de la distribución de los siniestros y de la función de demanda. Esto quiere decir que escoger una prima de mercado x implica la elección de una distribución de beneficio.

Si ahora suponemos que una companía de seguros tiene unas normas que le den la posibilidad de decidir acerca de la prima a la cual el seguro tiene que se ofrecido, tendrá que -

tener tambien una norma que le haga posible la elección de la mejor distribución de beneficio o la preferida entre las posibles. Esta norma representa el deseo de la compañía de asumir un riesgo, o bien, su política de riesgos, o en otros términos, los resultados que la compañía desea alcanzar.

La elección de la política o de los resultados apeteci - dos, constituye por su propia naturaleza, una decisión subjeti va. Supongamos que:

a) Una compañía de seguros tiene una escala completa de preferencias para decidir sobre la elección entre todas las - distribuciones posibles de beneficios. Esta decisión expresará la política de la compañía y en cada situación, intentará to - mar la decisión que conduzca a la preferida entre todas las -- distribuciones de benefios que sean posibles.

b) La preferencia en la decisión es consistente.

De estas hipótesis resulta que es posible asignar un número real o un índice $U(F)$ a cada distribución de beneficio $F(z)$ de forma que $U(F) > U(G)$ solo cuando $F(z)$ sea preferible a $G(z)$.

De lo que se sigue que existe una función con valor real $u(z)$ tal que $U(F) = \int_{-\infty}^{\infty} u(z)\, dF(z)$.

Esto es, toda norma establecida para la determinación de la prima para un contrato de seguros puede ser representada - por una función de utilidad $u(z)$ (utilidad asignada a una suma de dinero de cuantía z).

II.3.1.1. TEORIAS DEL RIESGO.

El objeto de toda teoría del riesgo es proporcionar un modelo matemático de las fluctuaciones aleatorias que permita discutir las medidas a tomar y analizar sus consecuencias.

Podemos indicar tres medios para prevenir desviaciones:

- Recargo de seguridad (λ)
- Reservas de estabilidad (S)
- Reaseguro (M)

Pero estas medidas no pueden ser llevadas más allá de lo necesario para alcanzar el equilibrio del ente asegurador, pues de lo contrario encarecerían el precio del seguro o disminuirían el beneficio de la empresa. Por otra parte, se puede conseguir el mismo grado de estabilidad con distintas combinaciones (λ,S,M) con lo cual se presenta el problema de elección que exige dar entrada a criterios económicos.

Toda teoría del riesgo relaciona las siguientes magnitudes:

-- Cartera (C): número de pólizas.
distribuciones básicas.
grado de homogeneidad.

-- Recargo de seguridad, reaseguro, reservas de estabilidad.

-- Indice de estabilidad ($\mathcal{E}$).

Es decir $\psi(S,M,\lambda,C,\mathcal{E}) = 0$

Asi, por ejemplo, para una cartera C, y fijado un índice de estabilidad obtendremos una relación entre las otras tres magnitudes $\varphi(S,\lambda,M) = 0$

II.3.1.1.1. Teoría del Riesgo Individual.

Considera el riesgo total de la compañía como el resultado de lo que acontece a todas las pólizas individuales emitidas por la misma. La ganancia o pérdida total de la compañía durante un período de tiempo, será la suma de todas las variables aleatorias asociadas a cada póliza individual existente en la misma. De acuerdo con el Teorema Central del Límite, esta suma será aproximadamente normal si el número de pólizas es grande. Tomemos una cartera formada por n pólizas distribuidas en h categorías: $n = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_h$.

Las pólizas de cada grupo serán homogéneas, es decir, la variable ξ_{ij} tiene la misma prima P_j y la misma varianza σ_j^2.

La variable que recoge la siniestralidad total será:

$$\xi = \sum_{j=1}^{h} \sum_{i=1}^{n_j} \xi_{ij} \qquad \begin{cases} E(\xi_{ij}) = P_j \\ \sigma^2(\xi_{ij}) = \sigma_j^2 \end{cases}$$

con media $m = E(\xi) = \sum_{j=1}^{h} n_j \cdot P_j$ y varianza $\sigma^2(\xi) = \sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2$

admitiendo la aproximación normal para ξ podemos escribir:

$$P(\xi - m > K_\varepsilon \sigma) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{K_\varepsilon}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \varepsilon$$

Los recargos de seguridad λ_j que han de llevar las primas P_j para prevenir desviaciones superiores a $K_\varepsilon \cdot \sigma$ con una probabilidad prefijada de antemano (ε) deberán cumplir:

$$\sum_j n_j \lambda_j P_j > K_\varepsilon \cdot \sigma = K \sqrt{\sum_j n_j \sigma_j^2}$$

si dichos recargos fueran constantes tendríamos: $\lambda > \dfrac{K_\varepsilon \sqrt{\sum_j n_j \sigma_j^2}}{\sum_j n_j P_j}$

cuanto más pequeño sea ε, mayor será K_ε y por tanto aumenta el recargo de seguridad mímino. Suponiendo que los fondos iniciales o reservas de estabilización son S, entonces la probabilidad de ruina será:

$$P(\xi - m > S + \sum_j n_j \lambda_j P_j) = P\left(\frac{\xi - m}{\sigma} > \frac{S + \sum n_j \lambda_j P_j}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{J(S,\lambda,\sigma,\varepsilon)}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \varepsilon$$

en donde:

$$J(S,\lambda,\sigma,\varepsilon) = \frac{S + \sum_j n_j \lambda_j P_j}{\sigma}$$

recibe el nombre de índice de riesgo.

Con la introducción del reaseguro (M) tendremos ya relacionadas todas las magnitudes de estabilidad. Considerando que el argumento M deja las variables netas de reaseguro, se puede escribir

$$P\left(\frac{\xi(M) - m(M)}{\sigma(M)} > \frac{S + n_j \lambda_j P_j(M)}{\sigma(M)}\right) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{J(S,\lambda,\sigma(M),\varepsilon)}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \varepsilon$$

donde el índice de riesgo es:

$$J(S,\lambda,\sigma(M),\varepsilon) = \frac{S + n_j \lambda_j P_j(M)}{\sigma(M)}$$

donde ya estan relacionadas las magnitudes de estabilidad (la cartera a través del número de pólizas, volumen de primas y - varianza).

El mismo índice ε se puede alcanzar actuando sobre S,λ ó M Esta indeterminación técnica se resolverá dando entrada al criterio económico.

A esta teoría se le señalan los siguientes inconvenientes:

-- La cartera tiene una movilidad que dificulta su aplicación.

-- Los capitales en riesgo (en vida) varían de un año a otro

-- No nos da la probabilidad de ruina en el futuro.

-- Si los grupos son de pequeño tamaño no es posible aplicar el Teorema Central del Límite.

113.112. Teoría del Riesgo Colectivo.

Los primeros estudios sobre la misma fueron realizados por F. Lundberg y continuados por autores tan prestigiosos como H. Cramer, C.O. Segerdahl y varios autores de la escuela sueca, siendo posteriormente ampliamente tratada.

En la misma se considera la colectividad asegurada como un todo, estudiando el desarrollo del negocio de seguros desde el punto de vista probabilístico, introduciendo además, modelos generales de probabilidad (recordemos lo expuesto al realizar el estudio de las distribuciones básicas, del daño total y sus aproximaciones).

Como indican Beard, Pentikainen y Pesonen:"la estructura financiera de la empresa depende, además de la siniestralidad, de los costes empresariales y de las inversiones de capital, pero estos dos factores no estan sujetos a la fluctuación aleatoria en la misma forma que los siniestros, y la Teoría del Riesgo, no es, por esta razón, la técnica apropiada para su estudio. Asi pues, se restringirá al estudio de los siniestros y al de la parte de las primas que quedan cuando los recargos para gastos empresariales han sido deducidos, esto es la prima de riesgo incrementada por el recargo de seguridad"(44)

En este contexto, podemos indicar como objetivo de la Teoría del Riesgo Colectivo dar respuesta a las preguntas:

1.- ¿Cual es el resultado del negocio al final de un período T?.- Esto equivale a encontrar la probabilidad de los diferentes valores posibles de S_T, en particular, la probabilidad de que la pérdida durante este período, sea igual o exceda la reserva inical S_o, haciéndose S_T negativa (ruina).

2.- ¿Cual es la probabilidad de que la ruina ocurra en algún momento de ese período T?.-

3.- ¿ Cual sería el resultado si T tiende a infinito?.-

Los elementos básicos de la Teoría son:

a) Opera con sumas de riesgo tanto positivas como negativas.

b) Opera con un tiempo t (tiempo operacional), donde t es el número medio de siniestros en el tiempo físico (0,t).

c) Ocurrido un siniestro, dará lugar a una indemnización de cuantía x_k. Esta variable tendrá una distribución V(x) independiente del tiempo.

En base a lo expuesto anteri-ormente sobre el proceso general de riesgo e introduciendo otras dos magnitudes de estabilidad: las reservas de estabilidad y el recargo de seguridad, vamos a plantaer el problema de la ruina.

<u>El proceso de ruina</u>.- Supongamos que los fondos acumulados en el intervalo de tiempo (0,t) viene dado por:

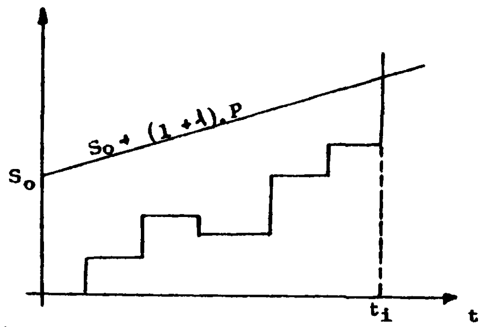
$$Z(t) = S + (1 + \lambda).P - X(t)$$

dode $P = t.c_1$ es la esperanza matemática de la siniestralidad y X(t) la variable asociada a la siniestralidad total de dicho período.

Llamaremos función de ganancia en el intervalo (0,t) a:

$$Y(t) = (1 + \lambda).P - X(t)$$

En la siguiente figura representamos los fundos acumulados y una trayectoria muestral de X(t). Si en el momento t_i -



se cumple que $Z(t_i) \leq 0$, diremos que se ha presntado la ruina.

Llamaremos probabilidad de ruina, a la de que se presente el suceso ruina en el futuro. Las hipótesis básicas del proceso $Z(t)$ son las misma que las del proceso $X(t)$.

II.3.1.2.1. La probabilidad de ruina para un período finito de tiempo

Calcularemos la función $\Psi_N(S)$ que nos dará la probabilidad de que al final de al menos uno de los años $1,\dots,N$ la siniestralidad exceda los recursos libres de la compañía, esto es, que ésta quede arruinada. Obtendremos una fórmula de recurrencia para el cálculo de dicha probabilidad.

Supongamos que las reservas en los momentos de tiempo 0, $1,\dots,N$ son $\eta_0, \eta_1, \dots\dots, \eta_N$, cada una de las cuales es una variable aleatoria excepto η_0 cuyo valor es conocido (S). La probabilidad buscada es entonces:

$$\Psi_N(S) = P(\eta_k \leq 0 \text{ para algún } 1 \leq K \leq N/\eta_0 = S)$$

Sea $H_1(x,S)$ la probabilidad de que las reservas en el periodo 1 sean mayores que x dado $\eta_0 = S$, y sea en general:

$$H_k(x,S) = P(\eta_1 > 0,\ \eta_2 > 0, \dots, \eta_k > x/\eta_0 = S)$$

Supongamos que la función de distribución de la siniestralidad total para un año $F(x)$, permanece estable e indepen -

diente de los siniestros de los años anteriores. La función - $H_k(x,S)$ puede ser obtenidad de la siguiente forma:

Para un s entero arbitrario la definición nos da para $k>1$

$$H_k(x,S)=\sum_{i=1}^{\infty} P(\eta_k > x / \frac{i}{s} < \eta_{k-1} < \frac{i+1}{s}) \; P(\frac{i}{s} < \eta_{k-1} < \frac{i+1}{s}, \eta_1 > 0, \ldots, \eta_{k-2} > 0 / \eta_0 = S)$$

El primer término del sumatorio es $H_1(x,\frac{i}{s}) + O(1/s)$ mientras que el segundo es igual a $H_{k-1}(\frac{i}{s},S) - H_{k-1}(\frac{i+1}{s}, S)$. Si - hacemos que s tienda a infinito obtendremos:

$$H_k(x,S) = - \int_0^{\infty} H_1(x,t) \; d_t H_{k-1}(t,S) \qquad \text{(I)}$$

Para utilizar esta fórmula de recurrencia, necesitamos - H_1, obtenida directamente de la definición

$$H_1(x,S) = F(S + (1+\lambda)P - x)$$

Por último tenemos

$$\psi_N(S) = 1 - H_N(0,S)$$

El supuesto de que la siniestralidad total $F(X)$ para un perído permanece constante para los sucesivos años puede ser eliminado si conocemos la ley de cambio de dicha función o puede ser estimada, sólo sería necesario hacer las correspondientes modificaciones al primer factor de la integral de (I). Desde - luego, el procedimiento requiere el cálculo de las correspondientes funciones $F_k(x)$, el trabajo no es excesivo si N no es grande. Un caso sencillo sería el de la Distribución de Poisson Compuesta.

Veamos como con ayuda del Método de Montecarlo, puede - ser calculada la integral (I). Consideremos el caso en el cual la distribución del daño total de cada año es de Poisson Compuesta. Supongamos que G es durante:

- el primer año $G^1(x) = \sum F_{n_i} \cdot P^1_{n_i}$
- el segundo año $G^2(x) = \sum F_{n_i} \cdot P^2_{n_i}$

....

- el año N-simo $G^N(x) = \sum F_{n_i} \cdot P^N_{n_i}$

Supongamos que las distribuciónes de Poisson Generalizadas estan dadas de antemano$(F_{n_1}, F_{n_2} \ldots\ldots)$, de igual forma que las distribuciones $(p^k_{n_i}) = U^k(z)$. Tambien supondremos que las primas P_k y los recargos de seguridad λ_k estan dados para $1 \leq k \leq N$

La probabilidad de ruina es calculada por simulación de tal forma que una muestra de todas las simulaciones del proceso de riesgo es obtenida . Si alguna realización causa la ruina antes del año N, es innecesario continuar hasta el final del período total. La primera realización puede ser obtenida en la forma siguiente: generemos un número aleatorio r_{1p}. Tomemos $n_s = (U^1)^{-1}(r_{1p})$ que será el valor muestral del valor esperado del número de siniestros en el primer año. Este experimento aleatorio fija la función de distribución de la siniestralidad total durante el primer período F_{n_s}. Generemos ahora otro número aleatorio r_{1F}, y sea $x_1 = F^{-1}_{n_s}(r_{1F})$, que puede ser considerado como la cantidad total de siniestros durante la primera realización muestral. Las reservas libres de la compañía serán entonces: $S_1 = S + (1 + \lambda_1)P_1 - x_1$.(si tenemos en cuenta la tasa de interes, habra de ser modificada).

Si S_1 es menor o igual a cero, la ruina habrá ocurrido y el experimento habrá concluido. Si no es así, obtendremos en forma análoga $S_2 = S_1 + (1 + \lambda_2)P_2 - x_2$. Si todos los S_i $i=1..N$ son mayores que cero, la muestra habrá dado el resultado "no ruina", en otro caso la ruina habrá ocurrido.

El proceso será repetido un número suficiente de veces,-la estimación de $\psi_N(S)$ vendrá dada por el cociente del número de ruinas y el tamaño muestral.

Hemos considerado que las tendencias y las fluctuaciones de largo plazo son deterministas; no sería excesivamente difícil incluir aleatoriedad en estos elementos de fluctuación.

II31.I22 Probabilidad de ruina para un período infinito de tiempo

Para realizar su estudio, establezcamos los supuestos:

1.- La función de distribución de la siniestralidad total durante un año $F(x)$ permanece constante, o al menos sus cambios son debidos a los del tamaño de la cartera que dan lugar a variaciones en el número esperado de siniestros de cada año.

2.- La función de distribución del tamaño de un siniestro $V(x)$ será independiente del tiempo.

3.- Una restricción más seria consiste en suponer la estabilidad del recargo de seguridad. Esto puede dar lugar a una insuficiencia de primas debido a las variaciones en el número esperado de siniestros. Nosotros separaremos el problema de esta insuficiencia de primas del efecto de las fluctuaciones aleatorias, que serán las que trataremos.

Supongamos que la reserva de estabilidad al principio de un período de tiempo T es S y sea ξ la siniestralidad total durante el período (variable aleatoria). T puede ser un período de tiempo cualquiera, supongamos un año. La ganancia de la compañía para este período es $\eta = (1 + \lambda)P - \xi$, donde λ es el recargo de seguridad constante y $P = E(\xi)$ las primas de riesgo ingresadas por la compañia en el período T, constantes tambien.

La ganancia esperada es entonces $E(\eta) = \lambda P > 0$. Si tenemos en cuenta las ganancias de N periodos consecutivos

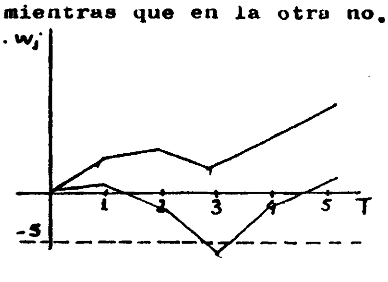
$$w_N = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_N$$

w_N es una función aleatoria del tiempo unida a un proceso aleatorio discreto. La probabilidad de que w_j sea menor o igual que -S en algún momento del tiempo entre 1 y N, esto es, que la compañía sea insolvente será: $\Psi_N(S) = 1 - P(w_i > -S$ para $i \le N)$ es la anteriormente considerada, pero en este caso N podrá tender a infinito. Llegados a este punto haremos la siguiente hipótesis:

4.- La siniestralidad ξ_i de los diferentes periodos es mutuamente independiente.

Pasemos a calcular la probabilidad de ruina. Supongamos para ello que la variable aleatoria η_i que indica la ganancia en el período i-esimo tiene una función de distribución G(y) independiente de i.

Llamemos v al entero más pequeño para el cual ocurre la ruina, esto es, v será el número para el cual $w_v \le -S$, $w_j > -S$ $(j<v)$ y será una variable aleatoria. En la siguiente figura observamos dos realizaciones del proceso, en una de ellas se dá el sudeso ruina (v=3), mientras que en la otra no.



Consideremos la función:

$$M(s)= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sy}\, dG(y) = E(e^{-s\eta_1})$$

como función auxiliar y tambien la función $E(e^{-sw_N})$, donde N - es una constante.

Consideremos asimismo dos diferentes desarrollos de ésta:

$$E(e^{-sw_N})=E(e^{-s\eta_1} . e^{-s\eta_2}........e^{-s\eta_N}) = (M(s))^N$$

$$E(e^{-sw_N})= \psi_N.E(e^{-sw_N}/v\leq N) + (1-\psi_N).E(e^{-sw_N}/N< v\leq\infty)$$

Esta última es obtenida separando las realizaciones del proceso en dos grupos: en el primero tomamos las que conducen a la ruina durante los N primeros períodos. La probabilidad de obtener una realización perteneciente a este grupo es ψ_N. Las demás estarán en el segu-ndo grupo, que englobará a aquellas que conducen a la ruina después (v>N) o nunca.

Si consideramos el segundo de los desarrollos podemos escribir:

$$\psi_N.E(d^{-sw_N}/v\leq N)= \psi_N.E(e^{-sw_v}. e^{-s(w_N-w_v)}/v\leq N) =$$

$$= \psi_N \sum_{i=1}^{N} P(v=i/v\leq N).E(e^{-sw_v} (M(s))^{N-i}/v=i) =$$

$$= \psi_N E(e^{-sw_v} .(M(s))^{N-v}/v\leq N)$$

si tenemos en cuenta la definición de w_N y M(s) y la independdencia entre $w_N - w_v$ y w_v.

Por tanto el segundo desarrollo puede ser escrito como:

$$E(e^{-sw_N})=\psi_N.E(e^{-sw_v}(M(s))^{N-v}/v\leq N) + (1-\psi_N)E(e^{-sw_v}/N<v\leq\infty)$$

que multiplicado por $(M(s))^{-N}$ nos da:

$$1 = \psi_N.E(e^{-sw_v}(M(s))^{-v}/v\leq N) + (1-\psi_N).E(e^{-sw_N}(M(s))^{-N}/N<v\leq\infty)$$

El valor de s, será aquel que cumpla la relación:

$$\boxed{M(s) = 1}$$

Es fácil demostrar que existe un único s=R que la satisface. Reemplazando s por R tendremos:

$$1 = \psi_N . E(e^{-Rw_v}/v \leq N) + (1 - \psi_N) . E(e^{-Rw_N}/N < v \leq \infty)$$

Hagamos ahora dos aproximaciones: primero omitamos el segundo término, es positivo o cero. Segundo, a partir de la definición de v, es claro que, w_v en el primer término indica el valor del beneficio (pérdida en este caso) que trae acarreado la ruina, será menor o igual que -S. Si reemplazamos w_v por -S el primer término del lado derecho de la ecuación disminuirá. De aqui:

$$1 \geq \psi_N \; e^{RS} \qquad \text{o bien}$$

$$\boxed{\psi_N \leq e^{-RS}}$$

fórmula fundamental de la Teoría del Riesgo Colectivo. En ella N puede ser un entero positivo, manteniendose cuando N tiende a infinito (45)

Calcularemos el valor de R para dos casos básicos:

-- La distribución del número de siniestros es de Poisson

-- La distribución del número de siniestros es Binomial negativa.

R lo obtendremos resolviendo $M(R) = E(e^{-R\eta}) = 1$

operando

$$E(e^{-R((1+\lambda)P - \rho)}) = e^{-R(1+\lambda)P} . E(e^{+R\rho}) = 1$$

o sea

$$e^{(1+\lambda)RP} = E(e^{R\rho}) = \varphi_n(V(R)) \qquad \text{(I)}$$

donde $\varphi_n(V(R))$ es la función generatriz de la distribución del daño total y V(R) la función generatriz de la distribución de la cuantía de un siniestro $V(R) = \int_0^{\infty} e^{Rx} \, dV(x)$

1.- Supongamos primero que la distribución del número de siniestros es de Poisson. En este caso (I) quedará:

$$e^{(1+\lambda)RP} = e^{t(V(R)-1)}$$

de donde

$$V(R) = \int_0^{\infty} e^{Rx}\, dV(x) = 1 + (1+\lambda).R.c_1 \qquad \text{(II)}$$

donde c_1 es el momento de orden uno respecto del origen de la distribución de la cuantía de un siniestro, cumple $P = t.c_1$.

Como es sabido el desarrollo en serie de potencias de e^{Rx} es $1 + \frac{x}{1!}R + \frac{x^2}{2!}.\ R^2 + \ldots\ldots.$

integrando tenemos

$$V(R) = \int_0^{\infty} e^{Rx} dV(x) = 1 + R.c_1 + \frac{R^2}{2!}.\ c_2 + \ldots\ldots\ldots$$

y sustituyendo en (II)

$$1 + R.c_1 + R^2.c_2/2! + \ldots\ldots = 1 + (1+\lambda).R.c_1$$

con lo cual

$$R.c_1 + R^2 c_2/2! + \ldots\ldots = R.c_1 + \lambda R.c_1$$

si consideramos unicamente los dos primeros términos del desarrollo tenemos

$$\frac{R^2}{2!}.c_2 \simeq \lambda\, R.c_1 \quad ,, \qquad \lambda c_1 \simeq \frac{R}{2}\ .\ c_2$$

y despejando R

$$R \simeq \frac{2.\lambda.c_1}{c_2}$$

2.- Supongamos que la distribución del número de siniestros es binomial negativa.

En este caso podemos sustituir en la relación (I) la función generatriz de la siniestralidad total. Tendremos entonces:

$$e^{(1+\lambda)RP} = \varphi_n(V(R)) = \left(1 - \frac{t}{h}\,(V(R)-1)\right)^{-h}$$

operando

$$e^{-(1+\lambda)RP/h} = 1 - (t/h)(V(R)-1)$$

a partir de ahora trabajaremos en unidades de coste medio, esto es $c_1 = \int_0^\infty x \, dV(x) = 1$, con lo que $P = t.c_1 = t$.
asi pues podemos escribir

$$-(1+\lambda)Rt/h = \ln\left(1 - (t/h)(V(R) - 1)\right)$$

siendo el desarrollo en serie de $\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \ldots\ldots$

tenemos:

$$(1+\lambda)Rt/h = \frac{t}{h}(V(R) - 1) - \tfrac{1}{2}(t/h)^2(V(R) - 1)^2 - \ldots\ldots$$

tomando los dos primeros términos del desarrollo de $V(R)$, y dividiendo la anterior expresión por t/h:

$$(1+\lambda)R = (R.c_1 + \frac{R^2}{2!}.c_2) + \frac{1}{2}\frac{t}{h}(R.c_1 + \frac{R^2}{2!}c_2)^2$$

aproximando solamente hasta R^2 y sin olvidar que $c_1 = 1$

$$(1+\lambda)R = R + R^2c_2/2! + \tfrac{1}{2}(t/h)R^2 = R + \frac{R^2}{2}(c_2 + t/h)$$

$$(1+\lambda) = 1 + \frac{R}{2}(c_2 + t/h)$$

$$1/R = \frac{1}{2.\lambda}(c_2 - 1 + 1 + t/h) = \frac{1}{2.\lambda}(1 + \sigma^2 + t/h)$$

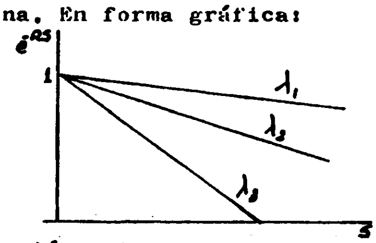
con lo que R será

$$R \simeq \frac{2.\lambda}{1 + \sigma^2 + t/h}$$

Es fácil ver que cuando $h \neq \infty$, esto es, existe efecto de contagio, la diferencia fundamental entre los dos casos tratados es que en el segurndo (Binomial negativa) R depende del tamaño de la compañía, medido a través del número medio de siniestros; mientras que el el primero no es así.

Tambien podemos observar que cuando existe contagio, la probabilidad de ruina es mayor para una compañía de gran tamaño que para una de pequeño.

Se comprende intuitivamente, que un incremento del recargo de seguridad, y para una misma probabilidad de ruina, permite la posesión de unas reservas de estabilidad más pequeñas, - de igual manera, un incremento en nuestras reservas nos posibilita reducir el recargo de seguridad manteniendo la misma probabilidad de ruina. En forma gráfica:



$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$

La introducción del reaseguro completará el sistema de - estabilidad, como en un próximo capítulo estudiaremos.

II.3.2.2.3 La probabilidad de ruina en un entorno inflacionario.

Seguiremos en este punto a G.C. Taylor (46). Las anteriores consideraciones sobre la probabilidad de ruina no tenían - en cuenta un fenómeno generalizado en las economías occidentades de los últimos años: la inflación. Demos entrada al mismo en nuestro estudio.

Consideremos un proceso de riesgo en el cual las primas recibidas en el intervalo de tiempo $(0,t)$ son representadas - por $P(t)$. Supondremos que el proceso comienza en $t=0$.

$X(t)$ representará la siniestralidad total ocurrida en el intervalo de tiempo $(0,t)$. $(X(t), t\geq 0)$ es, como ya conocemos, un proceso de Markov.

$S(t)$ denotará las reservas libres en el momento t; sean S_0 las reservas iniciales.

Tendremos el conocido proceso: $S(t) = S_o + P(t) - X(t)$

Siendo $X(t)$ la siniestralidad total hasta el momento t:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} x_i$$

donde x_i es la variable aleatoria que representa el tamaño del i-esimo siniestro y $N(t)$ es la variable aleatoria que representará el número de siniestros ocurridos en el intervalo de tiempo $(0,t)$.

Hasta aquí, salvo diferencias de nomenclatura, hemos repasado los procesos de riesgo y ganancia.

Superpongamos un proceso de inflación. Supondremos que éste es determinista, de forma que podremos representarlo por un factor de inflación no estocástico $f(t)$ (mayor que cero) para el tiempo t.

El volumen de primas y de siniestros pagados en el tiempo t estarán "inflados" por el factor $f(t)$ del que podemos suponer $f(o)=1$. Sea P^*, X^* y S^* la representación de las funciones , X y S despues de ser modificadas por el factor f. Tendremos:

$$P^*(t) = \int_o^t f(s)\ dP(s) \qquad \text{(I)}$$

$$X^*(t) = \int_o^t f(s)\ dX(s) = \sum_{i=1}^{N(t)} f(t_i).x_i \qquad \text{(II)}$$

donde t_i es el momento del i-esimo siniestro

$$S^*(t) = S_o + P^*(t) - X^*(t) \qquad \text{(III)}$$

hemos considerado que la inflación no afecta a las reservas libres, supuesto no excesivamente irreal a la luz de la experiencia de los últimos años.

Probemos la siguiente aseveración:

La probabilidad de ruina no disminuye si la inflación aumenta.

Lo haremos mostrando que si una realización $(S^*(t),\ t \geq 0)$ dirige a la ruina, tambien lo hace si aumenta la inflación.

Consideremos dos procesos S^*, por ejemplo, S_1^* y S_2^* asociados a los factores de inflación f_1 y f_2. Supongamos que una realización particular de S_1^* conduce a la ruina. Esto quiere decir que para algun t tendremos: $S_1^*(t)<0$, $S_1^*(s)\geq 0$ para $0\leq s<t$

A partir de (I), (II) y (III) podemos escribir:

$$S_2^*(t) - S_1^*(t) = \int_0^t (f_2(s) - f_1(s))\ dS(s) \qquad \text{(IV)}$$

integrando por partes

$$S_2^*(t) - S_1^*(t) = g(t).\ S_1^*(t) - \int_0^{t-0} S_1^*(s)\ dg(s) \qquad \text{(V)}$$

donde $g(s) = f_2(s)/f_1(s) - 1$, supondremos que esta función es estimable. Si $g(s)$ es una función monótona no decreciente (con $g(o) = o$) entonces $g(s)\geq 0$ para $s\geq 0$ y $dg(s)\geq 0$ para $S\geq 0$ y teniendo en cuenta (IV) y (V) $\Rightarrow$ $S_2^*(t) - S_1^*(t) \leq 0$

Con lo que podemos concluir lo siguiente: si dos procesos S_1 y S_2 sujetos a unos factores de inflación mensurables $f_1(t)$ y $f_2(t)$ tales que $f_2(t)/f_1(t)$ es no decreciente cuando t se incrementa, entonces la probabilidad de ruina (para un tiempo finito o infinito) no es menor para S_2^* que para S_1^*.

Observemos lo siguiente:

a) Las reservas iniciales son iguales en ambos procesos.

b) El resultado no depende de las propiedades del proceso S.

c) La condición de que $f_2(t)/f_1(t)$ sea monótona no derreciente es equibalente a la de que la tasa de inflación de S_2^* sea siempre no menor que la de S_1^* cuando f_1 y f_2 son suaves.

II.3.2. EL REASEGURO

El reaseguro es una de las componentes básicas del subsistema de estabilidad de la empresa de seguros. Forma junto a las reservas de estabilidad y el recargo de seguridad, una de las tres variables de decisión sobre las que puede actuar el empresario para optimizar la conducta del subsistema dentro de los objetivos generales de la empresa.

Resulta difícil dar una definición precisa del reaseguro debido a la existencia de diferentes formas del mismo, cada una de las cuales posee características propias. Sin embargo, el reaseguro supone siempre un traslado de una parte del riesgo asumido por un asegurador a otro, que recibirán los nombres de cedente y aceptante respectivamente. El primero de ellos es el único obligado frente al asegurado por la parte del riesgo asumido, pudiendo en caso de siniestro repercutir en el segundo, de acuerdo con las condiciones del contrato, las consecuencias del mismo.

La compañía aseguradora ha de buscar mediante el reaseguro la cobertura de los riesgos no asumibles por si misma y que por tanto comprometen uno de sus objetivos básicos: su supervivencia. La decisión de reasegurar una parte de los riesgos aceptados por un asegurador directo se reduce, simplificando al máximo, a una compra de seguridad por éste, por cuya compra paga un precio, cediendo por tanto una parte de los beneficios esperados para reducir la probabilidad de pérdidas inconvenientes.

El reaseguro realiza, en términos generales, las siguientes funciones desde el punto de vista de la entidad aseguradora:

1.- Equilibrio cuantitativo de los riesgos fijando el máximo de responsabilidad al que la compañía tendrá que hacer frente en caso de siniestro.

2.- Equilibrio cualitativo de los riesgos: compensando los diferentes tipos de riesgos a través de los ramos.

3.- Estabilidad financiera: sin la cual no sería posible a la compañía, en muchas ocasiones, desarrollar sus operaciones de seguro directo. En este sentido la actividad aseguradora contribuye a incrementar las posibilidades de oferta de coberturas del sector y, en definitiva, a aumentar la penetración del seguro dentro de la economía del pais.

4.- Juega un papel importante en el apoyo técnico y profesional a numerosos aseguradores, suministrándoles por un lado, información estadística sobre los mercados internacionales y, por otro, formación específica sobre concepción, tarificación y explotación de nuevos ramos y productos, a la vez que sobre riesgos especiales. Punto este de especial importancia para la pequeña, mediana o de raciente creación entidad.

<u>El reaseguro como sistema de control de la empresa de seguros</u>.

Consideremos el reaseguro como un meconismo de control que establece el asegurador directo para garantizar el indice de estabilidad adecuado (47).

Como ya indicamos, los elementos fundamentales que integran todo elemento de control son:

a) Sistema controlado. Constituido por el índice de estabilidad del cedente (probabilidad de ruina, riesgo de cartera)

b) Sensor, constituido ~~por~~ la información contable acerca de los riesgo asumidos y los siniestros ocurridos.

c) Regulador, misión que lleva a cabo la dirección del departamento de reaseguros, observando si el riesgo o el siniestro están comprendidos dentro de la cobertura del contrato de reaseguro y comunicando al reasegurador, en caso afirmativo, su obligación de aceptar el pago.

d) Controlador o intervención del reasegurador aceptando riesgos o pagando siniestros.

Un sistema puede diseñarse como de "control por circuito abierto" o de "control por cirauito cerrado", se diferencian en que en el último caso los anteriormente citados elementos de control pertenecen al mismo sistema, con lo que se efectua un control mucho más riguroso y una parte esencial del sistema es la realimentación: la salida del sistema es medida continuamente en términos de elemento controlado y la entrada es modificada adecuadamente para reducir el error o divergencia del sistema al mínimo posible. En nuestro caso, el circuito de realimentación expresa el hecho de que los siniestros ocurridos estimulan la necesidad de buscar en el seguro la correspondiente cobertura de riesgos, con la consiguiente entrada de flujo de primas en el asegurador directo.

Desde el punto de vista, el reaseguro de riesgos constituye un mecanismo de control por circuito abierto, ya que los elementos de control miden y actúan sobre las entradas del sistema, que en este caso son los riesgos asumidos que dan origen a una corriente o flujo para el asegurador directo. Este -

mecanismo no tiene en cuenta las perturbaciones y no garantiza por tanto un control efectivo de la variable controlada (indice de estabilidad).

Por otra parte, el reaseguro de siniestros constituye un mecanismo de control por circuito cerrado, ya que actua sobre las salidas del sistema (siniestros) por lo que neutraliza los efectos de las perturbaciones y realiza un control mucho más perfecto de la estabilidad del sistema.

En consecuencia, aunque este punto será objeto de un más profundo estudio en otra parte de este capítulo, tomando como modelo de decisión el mecanismo de control óptimo, la modalidad más adecuada desde el punto de vista de la compañía cedente es el reaseguro de siniestros, aunque tambien, el reasegurador asume todo el peso del control efectivo del sistema y por tanto exigirá un precio superior al que exigiría en caso de reaseguro de riesgos.

II.321 Clases de reaseguro

Diversos son los criterios con arreglo a los cuales se pueden clasificar las distintas modalidades de reaseguro. Distinguiremos dos:

1.- Según el método de contratación:

a) Reaseguro facultativo. No existe obligación de ceder o aceptar por ninguna de la partes y ademas, cada operación es independiente de las demás.

b) Reaseguro semifacultativo. El reasegurador tiene la obligación de aceptar, pero no existe la de ceder para el reasegurado.

c) Reaseguro obligatorio. Existe obligación de aceptar - por parte del reasegurador y de ceder por parte del reasegurado Esta obligación puede ser a su vez legal o contractual.

2.- Según el contenido de las cesiones.

a) Reaseguro de sumas o riesgos. La cesión es proporcional al riesgo corrido por el cedente, de aqui que sean proporcionales e individuales. A su vez se pueden dividir en 3 tipos:

-- Cuota parte.
-- Excedente.
-- Mixto.

b) Reaseguro de pérdidas o siniestros. En estas modalidades las cesiones ya no se fijan en proporción a las sumas aseguradas, sino que el reasegurador soporta los siniestros que - reunen ciertas condciones. Distinguiremos fundamentalmente:

-- Excess-loss
-- Stop-loss

Esta última clasificación nos servirá de referencia para realizar nuestro estudio sobre el reaseguro, sin olvidar que - el método de contratación puede influir en las condiciones económicas del acuerdo.

Otras formas de reaseguro a destacar son:

a) Pool: formación de consorcios reaseguradores (nacionalés o internacionales) a efectos de ampliar la capacidad de aceptación.

b) Un hecho que ha dado lugar a la aparición de nuevas modalidades ha sido el fenómeno de la inflación. Han surgido nuevos tratados como: ECOMOR y EPNOC.

Comenzaremos, sin afan de exhaustividad, definiendo y caracterizando cada una de las modalidades para posteriormente - centrarnos en el estudio de la decisión en el reaseguro con su triple vertiente:

-- Elección de la modalidad.
-- Cálculo del pleno.
-- Cálculo de la prima.

decisión que dependerá del criterio elegido para tomarla.

II.3.2.2. Reaseguro de sumas o riesgos

II.3.2.2.1. Cuota-parte.

Se caracteriza porque el reasegurador comparte cada riesgo de igual forma que la compañía cedente. La cesión es constante en relación a la suma asegurada. Asi si $1/K$ $(K>1)$ es la cuota retenida por el cedente, tendremos:

-- Suma de riesgo neta de reaseguro ....S/K
-- Para un siniestro de cuantía X

A cargo del cedente .... X/K
A cargo del reaseguro .... $(1 - 1/K)X$

Influencia en las distribuciones básicas.- la introducción de esta modalidad de reaseguro produce una modificación en la distribución de la cuantia de un siniestro $V(x)$.

Si las distribuciones y variables afectadas por el reaseguros llevan el subíndice o, tendremos:

$$V_o(x) = V(K.x)$$

y la función generatriz:

$$v_o(R) = \int_0^\infty e^{Rx}\, dV_o(x) = \int_0^\infty e^{Rx}\, dV(K.x) = \int_0^\infty e^{Rx/K}\, dV(x)$$

Esta modalidad de reaseguro no proporciona a la compañía cedente garantía para el riesgo de una siniestralidad superior a la esperada cuyo origen sea una desviación desfavorable del número de siniestros.

La prima de reaseguro.- Siendo P la prima pura que paga el asegurado por la cobertura del riesgo $P = t.\int_0^{\infty} x\ dV(x) = t.c_1$

La prima neta de reaseguro es:

$$P_c = t.\int_0^{\infty} x\ dV_o(x) = t.c_1/K = p/K$$

con lo que la prima de reaseguro será:

$$P_r = P - P_c = (1 - \frac{1}{K}).P$$

Es claro que la compañía cedente paga al reasegurador es un porcentaje de la prima original pagada por el asegurado (el de la responsabilidad total cedida al reasegurador).

La prima pagada al reasegurador es por tanto adecuada -- siempre que la suscripción del seguro por parte de la companía cedente sea correcta y la prima pagada por el asegurado sea - la justa.

En los ramos en que la tarifa está estrictamente controlada por el Estado, las mismas con frecuencia no son las ade - cuadas, con lo cual la prima recibida por el reasegurador también será inadecuada (48).

Ventajas e inconvenientes de esta modalidad de reaseguro

1.- Entre las ventajas podemos señalar (49)

a) La sencillez representa quizá la ventaja más importante ofrecida por el reaseguro de cuota-parte. Una vez realizado el contrato, su puesta en práctica no requiere gran administración. En pequeñas empresas con poco personal, éste puede ser -

dedicado a otras actividades con un consiguiente ahorro.

b) El compartir los riesgos de la misma manera, trae como consecuencia una comunidad de intereses entre aseguradora y reaseguradora. Esto beneficia sobre todo a la compañía reaseguradora, que se aprovecha de la selección de riesgos de la cedente. Por parte del asegurador directo, la posesión de una cartera rentable, ayuda a conseguir elevadas comisiones de reaseguro para cubrir sus costes de adquisición y administración, con una participación en beneficios que supone un beneficio exento de riesgos.

c) Al reasegurar una proporción fija de todos los seguros suscritos, la compañía reducirá la probabilidad de arruinarse, porque conseguirá una variación absoluta más pequeña de los siniestros retenidos respecto capital y reservas libres.

2.- Inconvenientes

a) La compañía cedente no puede elegir los riesgos que desee y por tanto el reasegurador recibirá una parte de la prima de aquellos riesgos que la cedente podría cubrir por sí sola.

b) El inconveniente técnico fundamental es el de no lograr reducir las variaciones de los resultados.

c) No reduce el coeficiente de siniestralidad experimentado por la cuenta retenida.

d) Como señala el profesor Prieto (50) esta modalidad no es apta cuando se trata del aseguramiento de nuevos riesgos que acompañan al desarrollo económico (atómicos, de aviación, de incendios de plantas industriales etc.). En el aseguramiento de estos riesgos, sucede que los porcentajes sobre primas -

que suelen ceder en reaseguro los aseguradores de pequeña y mediana importancia son tan elevados que originan una responsabilidad potencial peligrosamente grande en el supuesto de incumplimiento de alguno de los reaseguradores importantes. Este suceso repercutiría en el prestigio y crédito de la entidad.

El desequilibrio entre ventajas e inconvenientes hace - que se utilicen poco los tratados de esta clase, salvo cuando se da alguna de los siguientes situaciones (51):

- En ramos muy peligrosos en los que es necesario hacer el maximo de concesiones al reaseguro, que a dicha peligrosidad nunca añadiría la agravación producida por la antiselección de otros tratados.

- En compañías de reciente creación o que incian sus actividades en una clase de seguros o zona geográfica. La oferta de un contrato de cuota parte suele ser un incentivo para - que el reasegurador porporcione la protección indispensable - del reaseguro.

- En compañías filiales que de este modo traspasan parte de su negocio a las propietarias, sin que importe demasiado - que las condiciones favorables sean para ésta.

- En retrocesiones, donde se utiliza generalmente este - tratado.

II.3222 Reaseguro de excedente.

El asegurador directo fija unos plenos de retención, cediendo al reasegurador el exceso de capitales asegurados que superen dichos plenos. Surge por tanto el concepto de pleno de retención que puede ser definido como la parte de un riesgo que el cedente conserva por propia cuenta.

La capacidad del tratado de excedente se mide normalmente por el número de plenos que contiene, asi, por ejemplo, podemos hablar de que la retención de una compañía es de 5000 uc y tiene un tratado de excedente de diez plenos. En este caso la capacidad del trátado para absorber responsabilidad por encima de la cantidad retenida sería 50.000 uc.

En general una compañía fijará varios nivles de retención cuyo volumen varía en proporción directa a la calidad del riesgo que ha de reasegurarse. Un riesgo de baja calidad que presenta una posibilidad elevada de siniestro tendría una retención más baja que un riesgo de alta calidad con baja posibilidad de siniestro.

Sea M el pleno de retención.

Si la suma asegurada es S, tendremos que si:

-- $S < M$ no habrá reaseguro

-- $S > M$ si lo habrá

Para un siniestro de cuantía X:

--A cargo del cedente .... $\frac{M}{S} \cdot X$

--A cargo del reaseguro .... $\frac{S-M}{S} \cdot X$

Influencia del reaseguro de excedente sobre V(x).- El reaseguro de excedente influirá sobre las distribuciones bási cas. Veamos como modifica la distribución de la cuantía de un siniestro $V(x)$:

Sea $q(s)\,ds$ la probabilidad de que acaecido un siniestro la suma asegurada esté en $(S, S+ds)$

$P_s(x)\,dx$ la probabilidad condicionada de x (cuantía del siniestro) a S.

Siendo M el pleno de retención, tendremos:

$$V_o'(x) = \int_0^M q(S).P_s(x)\;ds \;+\; \int_M^\infty q(S).\;\frac{S}{M}\cdot P_s(\frac{S}{M}\;x)\;ds$$

distribución de probabilidad de la cuantía de un siniestro una vez introducido el reaseguro.

Criterios generales para fijar la retención.- Siguiendo a R.C.Reinard (52) podríamos citar los siguientes:

1.- Actitud de la dirección de la compañía, que al fijar la retención, fija tambien el riesgo que va a correr; decide el volumen de pérdidas que puede tener la compañía sin poner en peligro su solidez.y solvencia.

2.- En general podrá fijarse una retención más elevada debido a una base de primas más amplia y por tanto unos resultados más estables.

3.- Calidad de la cartera: la clase o tipo de riesgos pueden influir claramente sobre la retención neta establecida como ya indicamos anteriormente.

4.- Territorio: el asegurador de daños fijará una retención diferente en zonas, en que por ejemplo sufran huracanes periodicamente, que en otras. Tambien mantendrá una parte más pequeña de las primas en aquellas zonas en las que su volumen sea más pequeño.

Ventajas e inconvenientes.

1.- En cuanto a las primeras , podemos indicar que el reaseguro de excedente proporciona al reasegurado un método eficiente para conseguir la homogeneidad del tamaño: ofrece a la compañía cedente la posibilidad de regular el tamaño de la responsabilidad retenida.

Cuanto menor sea la variación del tamaño del riesgo asegurado en cada clase de riesgo, mayor será la posibilidad de predecir la experiencia de dicha clase (53). La retención reduce eficazmente cualquier desviación por encima de un nivel determinado de responsabilidad de cada clase,reduciendola a un pequeño margen. Los reaseguradores absorben las desviaciones de tamaño más notables.

2.- El reaseguro de excedente presenta dos inconvenientes fundamentales, uno desde el punto de vista del cedente y otro desde el punto de vista del reasegurador.

Para el cedente el inconveniente reside en los costos de administración relativamente elevados: los gastos de calcular la retención de cada riesgo asegurado, su codificación y la preparación de los informes a trasmitir a los reaseguradores y la distribución de las primas y los siniestros en las proporciones correspondientes a cada reasegurador, da lugar a un mayor coste de procedimiento.

Para el reasegurador el inconveniente es su característica inherente de selección de riesgos en su contra. Esta surge cuando la compañía cedente retiene más en los riesgos buenos que en los malos,obteniendo mayores ganancias en ellos.

II.3.2.2.3. Reaseguro mixto

Participa de las características de los dos anteriormente reseñados. A veces los contratos son diseñados para otorgar reaseguros de cuota-parte sobre todos los seguros de cierta - clase o clases determinadas suscritos por la compañía cedente y reaseguro de excedente para cubrir el pleno bruto de la misma.

Consideremos el siguiente ejemplo (54). La compañía cedente fija un límite de retención de 4.000 uc para los riesgos aceptados en seguros patrimoniales, pero desea aceptar cual- - quier riesgo individual hasta 100000uc. En consecuencia procura un contrato combinado de cuota parte y excedente mediante - el cual el reasegurador proporciona a la cedente la siguiente cobertura:

a) El 80% del reaseguro de cuota-parte, sujeto a un límite monetario sobre un riesgo de 20.000 u.c.

b) Cuatro plenos de reaseguro de excedente de 20.000 u.c que corresponden a la retención bruta

Si la compañía cedente recibe solicitudes de tres seguros cuyas sumas aseguradas son 10.000, 50.000 y 100.000 u.c, las retenciones y cantidades cedidas serán:

	Cedente		Cedidos	
	Retención	Participación prima bruta	Cuota-par.	Excedente
10.000	2.000	20%	8.000	----
50.000	4.000	8%	16.000	30.000
100.000	4.000	4%	16.000	30.000

La participación del reasegurador en la prima original y los siniestros se calcula en proporción a la cantidad cedida.

Estos contratos son adecuados a las necesidades de las compañías de reciente creación, si, como es probable, la compañía no puede ofrecer una cartera lo bastante equilibrada como para conseguir un contrato de excedente que proteja los riesgos más importantes que periodicamente haya de suscribir.

Tambien con frecuencia estos contratos combinados son utilizados por compañías cuya situación financiera es sólida, para incrementar la protección suministrada por una cobertura de exceso de pérdida. En estos casos el objetivo principal del contrato de cuota parte sería lograr un intercambio recíproco de negocios, mientras que el de excedente suministraría capacidad adicional.

Comisiones de reaseguro.-

Normalmente la prima cedida al reasegurador será la prima comercial. Por tanto el reasegurador entregará a la c dente una comisión que tiene por objeto compensarla de los gastos de adquisición, de administración y de los impuestos derivados del reaseguro. Todo ello constituye lo que se llama comisión básica. El nivel de la misma estará determinada por dos factores: el indice de gastos de la compañía y el beneficio del tratado. Asi, por ejemplo, si la siniestralidad de la cedente es del 57% y el indice de gastos el 36%, la comisión mínima será de este último porcentaje, pero si la siniestralidad se considera satisfactoria, tal vez se pueda negociar una comisión superior. Tambien el reasegurador suele pagar una sobrecomisión del 1 ó 2% en general para cubrir los gastos de administración del tratado que sufre el cedente y para compensar, en caso de ser reaseguradores profesionales y no poder reciprocar, de las ganancias que se obtendrían en la reciprocidad de su reaseguro que obtendría la cedente.

A su vez se suele pactar una participación en beneficios que tiene por objeto devolver a la cedente parte de las ganancias trasmitidas al reasegurador. Esta puede ser:

a) Un porcentaje fijo sobre las ganancias.-la cuenta de beneficio suele estar integrada por las siguientes partidas:

En el debe:--Pérdidas de ejercicios anteriores.
--Comisiones a cargo del reaseguro.
--Siniestros a cargo del reaseguro.
--Reservas técnicas del presente ejercicio.
En el haber: -- Primas cedidas en el ejercicio netas.
-- Reservas técnicas del ejercicio anterior.

El porcentaje de la participación fluctua entre el 10 y el 20%

b) Incluida en una comisión escalonada.- La comisión básica escalonada abarcará tanto la comisión fija como la participación en beneficios. En nivel de la comisión variará según las pérdidas experimentadas durante el año en cuestión. Habrá una comisión mínima y otra maxima a pagar. A partir de la mínima según disminuye el indice de siniestralidad la comisión pagada se incrementará hasta el límite superior.

Reservas técnicas.-

En este punto habrá de hacerse referencia a la legislación del pais concreto. En nuestro caso la Ley de Seguros Privados de 16-XII-54 en su articulo 23 establece que "las compañías de reaseguros harán figurar en sus balances las mismas clases de reservas que las compañías de seguros". Por otra parte el 21 obliga a que las reservas matemáticas, de riesgos en curso y los siniestros de tramitación terminada pendientes solo de pago, esten en poder del asegurador directo quien está obligado a justificar su importe y cobertura sin que sea posible deducción por reaseguro. Por esto en los contratos de reaseguro se establece en general la facultad del asegurador directo de retener en su poder un porcentaje de las primas cedidas (sobre el 40%) en concepto de depósito, para hacer frente a la cobertura de reservas técnicas. El depósito será devuelto al finalizar el período, recibiendo el reasegurador un interés, fijado de antemano, para compensarle en parte de los perjuicios de no manejar dicho depósito durante el período.

El depósito porporcionará a la cedente una liquidez adicional que no sería obtenida de un contrato no proporcional.

II.3.2.3. Reaseguro de siniestros.

Es aquel en que mediante la percepción de una prima especial, el reasegurador soporta los siniestros que reunan determinadas condiciones, que, en cambio no se hace cargo de ninguna parte alicuota de los contratos directos en conjunto.

Hicieron su aparición en el mercado de reaseguros más -- tarde que las modalidades proporcionales (de riesgos).

Las diferencias básicas con ellas son:

1.- No existe cesión de riesgos en las condiciones originales del seguro, sino que se estipula la obligación del reasegurador de compensar, dentro de ciertos límites, las pérdidas ya individuales ya colectivas experimentadas por el cedente en sus operaciones o una clase especfica de ellas mediante la percepción de una prima fijada empíricamente para cada contrato - en relación con la probabilidad y cuantía de las compensaciones.

2.- El siniestro del reasegurador tiene una naturaleza - peculiar y no se identifica ni es proporcional al del cedente.

3.- En el reaseguro de riesgos cada cesión conserva su - individualidad, aunque se regule en un tratado colectivo; en - cambio en el de siniestros tienden a perder su autonomía, refiriendose las estipulaciones más a un conjunto orgánico de si - niestros que a una agrupación de riesgos aislados (55).

4.- Si comparamos los reaseguros no proporcionales con los proporcionales, la ayuda que proporcionan los primeros para financiar la ampliación de las actividades de la compañía - cedente es más bien escasa o nula. Generalmente la compañía cedente tendrá que pagar la prima del reaseguro en depósito an -

tes de cobrar las primas correspondientes al año o período protegidos, aunque el reasegurador para paliar hasta cierto punto esta carga, quizá acepte cobrar una prima en depósito inferior a la definitiva prevista o distribuir el pago.

II.32.3) Reaseguro de excess-loss.

Se trata de una modalidad no proporcional en donde el reasegurador cubre lo que supera al pleno por siniestro fijado por el cedente.

Las causas que influyeron en su aparición y desarrollo fueron:

- Las pérdidas de las grandes catastrofes (San Francisco)

- Los seguros de accidentes en donde un mismo siniestro puede afectar a varias per nas. Asi como la aparición de los seguros de aviación, tormentas, heladas etc.

- La aparición desde 1920 del seguro de vehiculos a motor en especial modalidad de Responsabilidad Civil.

Podemos distinguir los siguientes casos:

a) Que se refiera a una sóla póliza.- Se llama tambien excedente de siniestros de primera especie o seguro a segundo riesgo.

b) Que se refiera a un conjunto de pólizas. Se les llama tambien semicolectivos.

Influencia en las distribuciones básicas.- la introducción de esta modalidad de reaseguro modificará la distribución de la cuantía de un siniestro $V(x)$. Supongamos un reaseguro -

excess-loss con pleno M. La distribución $V(x)$ será una vez introducido el mismo:

$$dV_o(x) = \begin{cases} dV(x) & \text{para } x < M \\ \int_M^{\infty} dV(x) & \text{para } x = M \end{cases}$$

siendo su función generatriz de momentos

$$V_o(R) = \int_0^M e^{Rx}\, dV(x) + e^{RM}\int_M^{\infty} dV(x)$$

Prima de reaseguro.

La prima para la cedente será:

$$P_c = t.\int_0^{\infty} x\, dV_o(x) = t.\left(\int_0^M x\, dV(x) + M\int_M^{\infty} dV(x)\right) = t.\pi_c$$

y la de reaseguro:

$$P_r = t.\int_M^{\infty} (x - M)\, dV(x) = t.\pi_r$$

cumpliendose $P = P_c - P_r$ y $c_1 = \pi = \pi_c + \pi_r$

En general, podemos escribir:

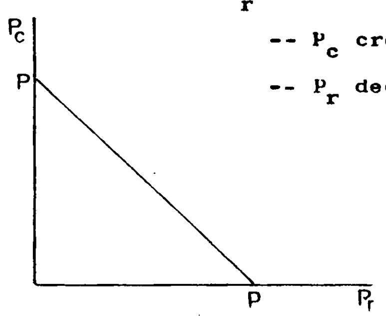
$$P = P_c(M) + P_r(M)$$

derivando respecto a M $\frac{dP_r(M)}{dM} + \frac{dP_c(M)}{dM} = 0$; $\frac{dP_c}{dM} = -\frac{dP_r}{dM}$

o sea $\frac{dP_c}{dP_r} = -1$, lo que nos indica que las variaciones de P_c y P_r com M son de diferente signo, esto es:

-- P_c crece al crecer M

-- P_r decrece al crecer M



II.3232 Reaseguro stop-loss.

Constituye una modalidad de reaseguro no proporcional en donde el reasegurador entre a pagar el exceso de siniestrali - dad total que se estipule, esto es, elcontrato cubre el exceso de siniestralidad global de la cartera reasegurada sobre una - determinada cifra o coeficiente. Cuando la cifra de siniestros pagada en la cartera llega al límite establecido, el reasegura do cesa de pagar por su cuenta y le corresponde hacerlo al rea segurador. La cifra de retención puede establecerse en dos ma- neras:

a) De modo absoluto, determinando la cantidad sobre la - cual comenzará la contribución del reasegurador.

b) De modo relativo, estableciendo un coeficiente del vo lumen de primas de la cartera, por el que se determinará el co mienzo de la contribución.

Tambien se puede establecer un límite máximo, pasado el cual la responsabilidad por los daños vuelve al reasegurado, que en su caso puede contratar un nuevo reaseguro de segundo - excedente de siniestralidad.

Es posible establecer que el reasegurado soporte por su propia cuenta una parte alícuota por todo siniestro compensable.

Este contrato se utiliza fundamentalmente en aquellos se guros en los que no resulta fácil la determinación de lo que - constituye un siniestro, que es el factor fundamental en los o tros reaseguros de siniestros. Esto ocurre en granizo u otros agrícolas. Tambien se emplea para el reaseguro de mutualidades con el fin de evitar a los mutualistas derramas suplementarias sobre las primas provisionales pagadas.

Las causas que han influido en su aparición y desarrollo han sido:

a) Aparición de las Entidades Mutuas (como elemento de competencia de las compañías) que como hemos dicho, necesitan limitar sus pérdidas a través de las modalidades colectivas.

b) Consecuencias catastróficas de la SGM.

c) Necesidad de reducir los costes de reaseguro procediendo a las cesiones despues de agotar su propia capacidad.

d) Disponer de uma modalidad que limite el riesgo de ruina de la empresa.

Influencia de esta modalidad en la distribución del daño total. La modalidad stop-loss de reaseguro modificará directamente la distribución del daño total. Si fijamos un pleno N, la distribución del daño total quedará en la forma:

$$dF_o(x,t) = \begin{cases} dF(x,t) & \text{para} \quad x < N \\ \int_N^\infty dF(x,t) & \text{para} \quad x = N \end{cases}$$

Prima de reaseguro.-

La prima neta de reaseguro será:

$$P_c = \int_0^\infty x \; dF_o(x,t) = \int_0^N x dF(x,t) \quad + \quad N \int_N^\infty dF(x,t)$$

y la prima de reaseguro:

$$P_r = \int_N^\infty (x - N) \; dF(x,t) \qquad \text{con} \qquad P = P_c + P_r$$

Ventajas e inconvenientes de la modadidad stop-loss.

En cuanto a las primeras podemos señalar:

a) Cubre las fluctuaciones tanto de grandes siniestros

-- como de las pérdidas ocasionadas por un gran número de ellos.

b) Es muy adecuado para las Mutuas.

c) Es el único que elimina el riesgo de ruina.

Como indica el profesor Prieto:"si atribuimos al reaseguro como función principal la estabilización de los resultados del asegurador directo, es evidente que esta modalidad logra plenamente sus objetivos. Al conseguir la estabilización de la siniestralidad, el beneficio de la entidad aseguradora sólo dependerá de los riesgos de otra índole que acompañan a la actividad aseguradora".

Más adelante comprobaremos que esta modalidad es la óptima desde el punto de vista de la estabilidad.

En cuanto a la principal dificultad que ofrece es, tal como puede adquirirse en la actualidad, la de que el porcentaje de pérdida máxima a soportar por el asegurador directo suele estar por encima de la media del reasegurado, hasta el punto de que este reaseguro parece proteger más contra la quiebra financiera del asegurador directo que tender a la estabilización de los resultados anuales.

Asi pues, la modalidad más interesante desde el punto de vista de la compañía cedente es, en las condiciones actuales, del mercado, o demasiado caro para el asegurador directo o demasiado arriesgado para el reasegurador.

II32.4. La influencia del reaseguro en la estabilidad.

Considerando la Teoría del Riesgo Colectivo llegamos al establecimiento de la siguiente relación:

$$\varepsilon \leq e^{-RS}$$

satisfaciendo R, según que la distribución del número de siniestros sea de Piosson o Binomial Negativa:

$$V(R) = \int_0^\infty e^{Rx} dV(x) = \begin{cases} 1 + (1+\lambda) RP/t \\ \dfrac{1 - e^{-(1+\lambda)RP/h}}{t/h} + 1 \end{cases}$$

Si la probabilidad de ruina mide el grado de estabilidad del ente asegurador, las anteriores relaciones nos darán su valor conocidos S, λ, P y h (en su caso). Estos elementos puedn sernos dados (S y λ) o bien ser calculables (P y h). Tambien ha de ser estimable la distribución $V(x)$.

Con la introducción del reaseguro, nos interesará el estudio de la repercusión de cierta política de reaseguramiento H en la estabilidad de la empresa aseguradora y el análisis de las decisiones a tomar para mantener la misma dentro de los límites previamente fijados

El reaseguro modifica, como hemos indicado, la siniestralidad de la empresa aseguradora, bien modificando la distribución de la cuantía de un siniestro $V(x)$ (cuota-parte, excedente y excess-loss) o la distribución de siniestralidad total $F(x,t)$ (stop-loss).

Asi pues al introducir el reaseguro tendremos:

$$\varphi_o(R) = e^{(1+\lambda)P_c R} = \int_0^\infty e^{Rx}\, dF_o(x,t)$$

Para $\varphi_o(R) = \varphi_n(V_o(R))$ podemos escribir:

$$\varepsilon_0 \leq e^{-RS}$$

$$\int_0^{\infty} e^{Rx}\, dV_o(x) = \begin{cases} 1 + (1+\lambda) P_c R/t \\ \dfrac{1 - e^{-(1+\lambda) P_c R/h}}{t/h} + 1 \end{cases}$$

donde P_c es la prima pura neta de reaseguro.

Desde el punto de vista exclusivamente de la estabiliad de la empresa aseguradora, con el reaseguro podemos pretender reducir el grado de inestabilidad (llevar la probabilidad de ruina a un nivel ε_o). Para ello podemos actuar en las siguientes formas:(56)

1.- Conservando el mismo recargo de seguridad λ, que sin reasegurar proporcionaba una probabilidad de ruina ε y elegir una política de reaseguramento, mediante la cual se consiga reducir a un nivel ε_o.

2.- Siendo dada la política de reaseguramiento, obtener el recargo de seguridad λ_c tal que las anteriores relaciones nos proporcionen el mismo grado de estabilidad. Tendremos:

$$\int_0^{\infty} e^{Rx}\, dV_o(x) = \begin{cases} 1 + (1+\lambda_c) P_c R/t \\ \dfrac{1 - e^{-(1+\lambda_c) P_c R/h}}{t/h} + 1 \end{cases}$$

donde λ_c es el recargo de seguridad que necesita el cedente para mantener la misma probabilidad de ruina.

Esta forma de actuar implica la utilización del modelo matemático de la Teoría del Riesgo Colectivo, como un modelo de decisión para apoyar en él las decisiones que atanen a la solvencia dinámica de la entidad aseguradora.

II.32.5 La decisión en el reaseguro

Como ya indicamos, distinguiremos tres problemas basicos:

1.- Fijación del sistema o modalidad de reaseguro.

2.- Fijación del pleno.

3.- Calculo de la prima.para las distintas modalidades una vez fijados los plenos.

El tercero de ellos ya ha sido abordado. Los dos primeros problemas son de elección y requieren la existencia de un criterio que nos permita tomar la mejor deci-sión.

Estaremos ante un critério de estabilidad cuando se tiene en cuenta la repercusión de cada decisión en el índice de estabilidad. En esta linea se encuentran los trabajos de varios autores que han desarrollado las teorias del riesgo. Sin embargo, cuando se intenta aplicar a los problemas que se presentan en la empresa de seguros encuentra limitaciones; de ahí han dimanado las críticas principales a la misma:

a)Para calcular una magnitud de estabilidad, que criterio se utiliza, el criterio F (distribución para un período fijo) o el criterio Ø (función de ruina)

b) Otra critica importante (Ottaviani, De Finetti, Borch) es la del que el criterio Ø considera una acumulación indefinida de reservas que es incompatible con la finalidad del empresario que persigue un beneficio repartible.

c) Cuando se da entrada al empresario, surge la necesidad de considerar sus preferencias, lo que ha dado lugar a la teoría de la utilidad en el seguro (Borch, Khan, Wolff..).

En ocasiones se dice que la teoría es muy restringida, - ya que a medida que se van acumulando reservas, el recargo de seguridad debe disminuir, planteandose su generalización, con su correspondiente dificultad matemática. Todo ello sin tener en cuenta que se estan relacionando dos variables con arreglo a un criterio, el de estabilidad,que resulta insuficiente cuando se consideran las interrelaciones entre los distintos sistemas y subsistemas que integran el sistema actuarial total.

La insuficiencia de los criterios de estabilidad se pone de manifiesto a través de las consideraciones siguientes:

-- Contemplando la producción del servicio seguridad en su doble aspecto: tecnico y económico-

-- Dando entrada a los supuestos de racionalidad del sujeto económico (empresario) que lleva a cabo el proceso productivo.

-- Teniendo en cuenta el ambiente en que este toma sus decisiones (orden socioeconómico y mercado)

II.3.2.5.1. Fijación de la modalidad.

Es necesaria la adecuada información y un criterio con arreglo al cual realizar la elección. Consideraremos los siguientes criterios:

-- De estabilidad.
-- Económicos.
-- Basados en un orden de preferencia.
-- Mercado.

a) Criterio de estabilidad.- En base al mismo elegiremos aquella modalidad, que para un mismo volumen de primas de propia retención, nos proporcione una probabilidad de ruina inferior. La elección resultará en el orden: 1.- Stop-loss, 2.- Excess-loss, 3.- Excedente y 4.- Cuota-parte que nos proporcio -

nan un riesgo creciente.

Si utilizamos la varianza como medida de estabilidad, la modalidad óptima de reaseguro será aquella que haga mínima la varianza de la distribución del daño total de la cedente. Esto equivale a minimizar la probabilidad de ruina, al menos en los casos en que F es normal(57). Varios autores toman en consideración la varianza como medida de estabilidad, destacaremos a Beard, Pentikainen y Pesonen (58), E. Prieto (59) y el profesor Vegas Asensio (60). Siguiendo al segundo de ellos, consideremos la variable aleatoria ξ , que representa la siniestralidad total de la cartera de la entidad aseguradora en un período de tiempo. $F(x) = P(\xi \leq x)$.

Sea μ la variable aleatoria asociada al importe total de la siniestralidad a cargo de la entidad despues de aplicar una política de reaseguro H.

Dicha política será tal que para un $\xi = x$ corresponde un $\mu = y$ de forma que $o \leq y \leq x$

Podemos plantear el problema en la siguiente forma:

Encontrar una política de reaseguro H que cumpla la condición de que fijado $E(\mu) = P_c$ (prima de propia retención) - sea mínima la varianza de μ .

La diferencia $E(\xi) - E(\mu) = P - P_c$ es la prima pura -- correspondiente al reaseguro para la politica H, política eficiente en el sentido de que dada la prima de reaseguro, proporciona una varianza mínima para la siniestralidad a cargo de la entidad aseguradora.

Supongamos que entre μ y ξ existe la relación $\mu = H(\xi)$

Evidentemente la consistencia de la política de reaseguro supondrá $o \leq H(x) \leq x$

Tenemos $E(\mu) = E(H(x)) = \int_0^{\infty} H(x)\, dF(x) = P_c$

Encontrar una política de reaseguro eficiente en el sentido indicado, consistirá en obtener una relación $\mu = H^*(\xi)$ donde H^* es una función desconocida que satisface las ecuaciones:

-- $o \leq H^*(x) \leq x$

-- $E(H^*(\xi)) = P_c$

-- $Var\,(H(\xi)) \geq Var\,(H^*(\xi)) \qquad \forall H$

Demostremos el siguiente teorema: Una política de reaseguro eficiente aparece cuando:

$$H^*(x) = \begin{cases} x & \text{para } x < M \\ M & \text{para } x \geq M \end{cases}$$

donde M se elege de forma que $E(H^*(\xi)) = P_c$

esto es, cuando se lleva a cabo la contratación de un reaseguro stop-loss. En efecto, podemos escribir:

$$\begin{aligned} Var\,(H(\xi)) + P_c^2 &= \int_0^{\infty} H^2(x)\, dF(x) = \\ &= \int_0^{\infty} (H - M)^2\, d\,F(x) + 2.M.P_c - M^2 \geq \\ &\geq \int_0^{M} (H - M)^2\, d\,F(x) + 2.M.P_c - M^2 \geq \\ &\geq \int_0^{M} (x - M)^2\, d\,F(x) + 2.M.P_c - M^2 = \\ &= \int_0^{\infty} (H - M)^2\, d\,F(x) + 2.M.P_c - M^2 = \\ &= Var(H^*(\xi)) + P_c^2 \end{aligned}$$

con lo cual $Var(H(\xi)) \geq Var\,(H^*(\xi)) \quad \forall H$

b) Criterios económicos.- Daremos entrada al coste o beneficio de reaseguro. Al dar entrada a esta nueva información nos encontramos con que los tres problemas ya no se presentan como independientes; por ejemplo, H.G. Verbeek (61), en base a la varianza como criterio de estabilidad llega a un reaseguro óptimo que es una combinación de las modadidades excess-loss y stop-loss. Analicemos la siguiente generalización (62):

A un reaseguro excess-loss con pleno M se le superpone un stop-loss con pleno N. La distribución de siniestralidad total será:

$$F_M(x,t) = \sum_0^{\infty} P_n(t)\; V_M^n(x) \quad \text{con} \quad dV_M(x) = \begin{cases} dV(x) & x < M \\ \int_M^{\infty} dV(x) & x = M \end{cases}$$

los momentos de V_M serán:

$$\mu_r(M) = \int_0^M x^r\, dV(x) - M^r(1 - V(M))$$

y las primas cedidas $\quad P_1(M) = P - t.\mu_1(M)$

Al introducir un stop-loss con $N = m.P_1(M)$, la prima y la varianza de la siniestralidad cedida serán:

$$P_2(M,m) = \int_N^{\infty}(x - mP_1(M))\; dF_M(x,t)$$

$$\sigma^2(M,m) = \int_N^{\infty}(x - nP_1(M))^2 dF_M(x,t) - P^2(M,m)$$

Si antes de estos reaseguros las primas totales eran P, después de estas operaciones las primas del cedente serán:

$$P_c = P - P_1(M) - P_2(M,m)$$

Ademitiendo que en la modalidad stop-loss el margen del reaseguro gira sobre la desviación típica, tendremos el siguiente modelo generalizado:

$$C(M,m) = \lambda_c P_c + \lambda_1\; P_1(M) + \lambda_2\, \sigma(M,m)$$

Con las condiciones de estabilidad:

$$e^{(1+\lambda)RP} = \int_0^{\infty} e^{Rx}\, dF_M(x,t) = \varphi_o(R)$$

$$e^{(1+\lambda_c)P_c R} = \int_0^{M} e^{Rx}\, dF_M(x,t) = e^{RN}\int_0^{\infty} e^{Rx} dF_M(x,t) = \varphi_o(R)$$

operando con estas igualdades tendremos:

$$(1+\lambda)PR + (1+\lambda_c)P_c R = \lg \varphi(R) + \lg \varphi_o(R)$$

es decir

$$(1-\lambda)(P_c + P_1 + P_2) + (1+\lambda_c)P_c = \frac{1}{R}(\lg\varphi(R) - \lg\varphi_o(R))$$

de donde

$$\lambda_c P_c + \lambda_1 P_1(M) - \lambda_2 \sigma(M,m) = (1+\lambda_1)P_1 + P_2 + \lambda_2\sigma(M,m) + \frac{1}{R}\lg\varphi + \lambda$$

el problema queda reducido a calcular M y m que hagan:

mínimo $C(M,m) = (1+\lambda_1)P_1(M) + P_2(M,m) + \lambda_2\sigma(M,m) + \frac{1}{R}\log{}_o$

cuyas derivadas parciales son

$$\frac{\partial C}{\partial M} = (1+\lambda_1)\frac{dP_1(M)}{dM} + \frac{\partial P_2}{\partial M} + \lambda_2\frac{\partial\sigma(M,m)}{\partial M} + \frac{1}{R\varphi_o}\frac{\partial\varphi_o}{\partial M} = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial m} = \frac{\partial P_2}{\partial m} + \lambda_2\frac{\partial\sigma(M,m)}{\partial m} + \frac{1}{R\varphi_o}\frac{\partial\varphi_o}{\partial m} = 0$$

Este sistema nos porporciona la solución óptima (M_o, m_o), es decir la mejor combinación excess-loss--stoploss de minimo coste.

c) Criterios basados en un orden de preferencia.- En este caso, dada la función de utilidad $U(x)$, el problema se puede formular en los siguientes términos:

Siendo las primas de propia retención $P_M = \int_0^{\infty} x\, dF_M(x)$ la solución óptima se obtiene de maximizar:

$$\int_0^{\infty} U(S_o + P_M - x)\, dF_M(x)$$

la elección de la modalidad dependerá de la forma de la función de utilidad, que reflejará la propensión al riesgo del decisor. Asi, por ejemplo, si la función de utilidad es lineal no existe aversión al riesgo y se decidirá en función de la media; si fuese una parábola de segundo grado, de alguna forma aparecerá la varianza, y en la medida en que la función representa una gran aversión al riesgo se elegirán las modalidades que presenten mayor estabilidad a la compañía.

d) Mercado.- Varios son los autores que han planteado modelos del mercado de reaseguros en general . Nosotros por razones de coherencia y simplicidad no vamos a emprender su estudio. Nos limitaremos, sin embargo, a introducir la influencia de la compañía aceptante al modelo panteado en el apartado a). Recordemos que, en base a un criterio de estabilidad, y tomando la varianza como medida de la misma, llegabamos a la modalidad stop-loss como la óptima desde el punto de vista de la compañía cedente. Demos entrada a la compañía aceptante, que suponemos actuará en la siguiente forma(63):

Partiendo de que la correspondiente modalidad de seguro tiene un recargo de seguridad λ , que despues de deducido el porcentaje de carácter fijo retenido por el asegurador directo, β , quedará un importe $(1-\beta).\lambda$, que habrá de ser repartido entre el cedente y el reasegurador. Como el reaseguro no proporcional origina una transferencia de riesgo del asegurador directo al reasegurador, éste tratará de compensar el mayor riesgo incrementando su propio recargo de seguridad o margen de reaseguro, es decir, su participación en la suma $(1-\beta)\lambda$ ya que P_r es fijo, con lo que desde el punto de vista del cedente se pueden perder parte de las ventajas ofrecidas por haber encontrado la modalidad de riesgo mínimo.

Por esta razón se demuestra tambien que si $V^2(x)$ es el riesgo medio de la cartera total de seguros, Tx la parte del daño x a cargo del primer asegurador, $V^2(x_o) = V^2(Tx)$, el riesgo medio de la cartera del primer asegurador y $V^2(x_1) = V^2(x - Tx)$ el reisgo medio de la cartera del reasegurador y elegimos un valor V_1 con $0 < V_1^2 < V^2(x)$.

Sea $V_1^2 = (1 - t)^2 V^2(x)$ con $0 < t < 1$; entonces se verifica que: para $V^2(x_1) = V_1^2$, reaseguro proporcional $x_o = t.x$ es el que ofrece el riesgo medio mínimo de la cartera remanente del primer asegurador entre todos los reaseguros admisibles.

En efecto, con ayuda de la transformación Tx formamos la transformación $Sx = Tx - tx$. Ahora se cumple:

$$\begin{aligned}
(1 - t)^2 V^2(x) &= V_1^2 = V^2(x - Tx) = \\
&= \int_0^\infty (x - Tx - E(x - Tx))^2 \, dF(x) = \\
&= \int_0^\infty (x - tx - Sx - E(x-tx-Sx))^2 \, dF(x) = \\
&= (1 - t)^2 \int_0^\infty (x - E(x))^2 \, dF(x) - \\
&- 2(1-t) \int_0^\infty (x-E(x))(Sx-E(Sx))dF(x) + \\
&+ \int_0^\infty (Sx - S(Sx))^2 dF(x) =
\end{aligned}$$

$$=(1-t)^2 V^2(x) - 2(1-t) \int_0^\infty (x-E(x))(Sx-E(Sx))dF(x) - \int_0^\infty (Sx-E(Sx))^2 dF(x)$$

en consecuencia:

$$\int_0^\infty (Sx - E(Sx))^2 \, dF(x) = (\tfrac{1}{2}(1-t)) \int_0^\infty (x-E(x))(Sx-E(Sx))dF(x)$$

Pero

$$\begin{aligned}
V^2(x_o) &= \int_0^\infty (Tx - E(tx)^2 dF(x) = \int_0^\infty (tx + Sx - E(tx+Sx))^2 \, dF(x) = \\
&= t^2 V^2(x) - 2t \int_0^\infty (x-E(x))(Sx-E(Sx))dF(x) - \int_0^\infty (Sx-E(Sx))^2 dF(x)
\end{aligned}$$

de donde podemos obtener facilmente:

$$V^2(x_o) = t^2 V^2(x) + (1/(1-t)) \int_0^\infty (Sx-E(Sx))^2 \, dF(x)$$

$V^2(x_o) \geq t^2 V^2(x)$ siempre se cumple y para $Sx \equiv 0$, $V^2(x_o)$

toma su valor mínimo. Sin embargo, para este caso se deduce - de $S_x = Tx - tx$ que $Tx \equiv tx$ lo que quiere decir que el primer asegurador tiene un riesgo medio que alcanza su valor mínimo para reaseguros proporcionales $x_o = tx$; $x_1 = x - tx = (1-t)x$.

La importancia de este teorema es clara. Si el reasegurador trata de defenderse de la transferencia del riesgo de - la cartera a la que se llegaba mediante el sistema de reaseguro óptimo, stop-loss, desde el punto de vista de la cedente, y para ello establece en las condiciones de aceptación del -- reaseguro un riesgo fijo V_1^2, entonces la modalidad óptima para el cedente es el reaseguro proporcional cuota-parte.

En la práctica aseguradora, la parte que posee un mayor potencial económico es la que impone las condiciones del contrato de reaseguro.

II.3.2.5.2. Fijación del pleno.

Una vez elegida la modalidad de reaseguro, hemos de calcular el pleno. El mismo ha recibido una especial atención dentro de la matemática del seguro. Podemos resolver el problema valiéndonos de diferentes criterios:

-- De estabilidad.
-- Económicos.
-- Basados en un orden de preferencias.

analicemos las distintas soluciones obtenidas.

a) Criterio de estabilidad.- Prescindiendo de los aspectos comerciales y financieros del reaseguro, nos encontramos en un primer plano con criterios de estabilidad para la fijación del pleno. En base a la Teoría del Riesgo y previamente fijado el grado de estabilidad, aparece el pleno como incógnita del problema. En este punto podemos utilizar el criterio F (distribución para un período fijo) o el ϕ (función de ruina).

a.1) Criterio F.- Supongamos la aproximación normal para la distribución de la siniestralidad total en un período fijo de tiempo.

$$F(x,t) = \phi\left(\frac{x-P}{\sigma}\right)$$

donde, como ya es conocido $P = t.c_1$ y $\sigma = \sqrt{t.c_2}$.

Sea y_ε la solución de la ecuación $\varepsilon = \phi(-y)$. Dada la distribución Normal, x vendrá dado por $x - P = y_\varepsilon\sqrt{t.c_2}$,(1) donde la diferencia x - P representará la cantidad que el asegurador habrá de poseer además de las primas de riesgo recibidas, ε nos da la probabilidad de que la cantidad total de siniestros supere a x (en un perído fijo de tiempo). Si considera -

mos la existencia del recargo de seguridad λ , tendremos:

$$x = S + (1 + \lambda)P \qquad \text{(II)}$$

donde S representa las reservas de estabilidad. A partir de (I) y II obtenemos $S = y_{\varepsilon}\sqrt{t.c_2} - \lambda t.c_1$ (III)

o si consideramos la aproximación NP :

$$S = (y - \frac{\gamma}{6}(y^2-1))\sqrt{t.c_2} - \lambda t_1 c_1 \qquad \text{(IV)}$$

las ecuaciones (III) y (IV) continen ε, λ , t, S y M una vez introducido el reaseguro, ademas dependeran de la distribución de la cuantía de un siniestro.

Conocidas las magnitudes ε, λ , t y S asi como la distribución $V_M(x)$ para cada valor de M (consideremos las modalidades de excedente ó excess-loss). M puede ser obtenido resolviendo (III) ó (IV) según la aproximación elegida.

Consideremos, igual que al principio, la aproximación Normal (III) y supongamos la cartera total compuesta de varias subcarteras, cada una de las cuales tiene su propia función de distribución de la cuantía de un siniestro $V_i(x)$, recargo de seguridad λ_i, número esperado de siniestros t_i y pleno M_i.

El problema consiste en determinar los M_i que:

1.- maximicen el total de la ganancia como una función de los M_i: $f(M_1, \ldots\ldots M_r) = \sum \lambda_i t_i (c_1)_i$

2.- satisfagan la ecuación (III) para toda la cartera:

$$Q(M_1, \ldots, M_r) = S - y.t.c_2 + \sum \lambda_i . t_i . (c_1)_i = 0$$

la resolución se puede realizar utilizando el método de Lagrange, para ello formaremos la función $F = f - pQ$, donde p es una variable auxiliar.

Para obtener una solución real, haremos algunos supuestos referentes a la cartera. Consideraremos la modalidad stop loss y para facilitar los calculos que el recargo de seguridad λ_i es independiente de la retención M_i, asi como $S > 0$.

Supondremos tambien la existencia de las derivadas V_i' y definiremos $V_i'=0$ para $M_i \leq 0$.

Haciendo algunas operaciones (64) tendremos:

$$\frac{\partial F}{\partial M_i} = t_i(1 - V_i(M_i))((1-p)\lambda_i + \frac{py}{t.c_2} \cdot M_i)$$

partiendo de estas derivadas en cero y Q obtendremos los valo res extremos. Llamando

$$\mu = \frac{\sqrt{t.c_2}}{y} \cdot \frac{p-1}{p}$$

tendremos

$$M_i = \mu \lambda_i$$

que sustituidos en Q, nos determinarán .

Según lo anterior, los límites de retención han de ser elegidos de forma proporcional a los recargos de seguridad.

a.2) Criterio ϕ_i de la función de ruina.- Una vez elegida la modalidad de reaseguro,y fijada la probabilidad de ruina, el pleno podrá ser obtenido a partir de las relaciones:

$$\varepsilon = e^{-RS}$$

$$e^{(1+\lambda)RP_c} = \varphi_n(v_o(R)) = \begin{cases} e^{t(v_o(R) - 1)} \\ (1 - \frac{t}{h}(v_o(R) - 1))^{-h} \end{cases}$$

mencionadas anteriormente

b) Criterio de óptimo económico.- Daremos entrada al coste o beneficio del reaseguro mediante una función en la cual aparece el pleno como incógnita. Este pleno (variable de decisión) se elige con un criterio de óptimo (beneficio máximo o coste mínimo) y con arreglo a unas restricciones impuestas por el grado de estabilidad deseado.(65)

Para elaborar el modelo es preciso contar con los datos que intervienen en la operación. Supondremos los siguientes:

λ_r= recargo exigido por el reasegurador sobre las primas P_r,

a= proporción de la prima recargada cedida que se retorna como comisión de reaseguro.

bP_c= beneficio técnico conservado por el cedente

La función de beneficio será:

$$B = P - (\lambda_c P_c - bP_c) - \lambda_r P_r + a(1 - \lambda_r) P_r =$$

$$= P - (\lambda_c P_c - (b + \lambda_r - a(1 + \lambda_r)) P_r + bP =$$

$$= P - \lambda_c P_c - \lambda_r^1 P_r + bP.$$

siendo $\lambda_r^1 = (b + \lambda_r - a(1 + \lambda_r))$

Prescindiendo de la cosntante podemos escribir la función de coste: $C = \lambda_c P_c - \lambda_r^1 P_r$

El criterio será hacer mínima esta función de coste tal que:

$$e^{(1+\lambda)PR} = \int_0^\infty e^{Rx}\, dF(x,t) = \varphi(R)$$

$$e^{(1+\lambda_c)P_c R} = \int_0^\infty e^{Rx}\, dF_o(x,t) = \varphi_o(R)$$

multimplicando éstas y tomando logaritmos:

$$(1+\lambda)PR + (1+\lambda_c)P_c R = \ln \varphi(R) + \ln \varphi_o(R)$$

teniendo en cuenta que $P_c = P - P_r$ y siendo A los términos cons -

tantes se llega:

$$C = \lambda_c P_c + \lambda_r^1 P_r = (1+\lambda_r^1) P_r + \frac{1}{R} \ln \varphi_o(R) + A$$

suponiendo que el pleno es H de

$$\frac{dC}{dH} = (1+\lambda_r^1) \frac{dP_r}{dH} + \frac{1}{R} \frac{d}{dH} \ln \varphi_o(R) = 0$$

se obtiene el pleno H_o con la condición:

$$\left(\frac{d^2 C}{dH^2}\right) H = H_o > 0$$

Ahora, tomando como base el modelo más general de Polya, haremos aplicación a los casos siguientes:

1.- Reaseguro de cuota-parte.- Teniendo en cuenta que:

$$\frac{dP_r}{dk} = \frac{t\Pi}{k^2} \quad ; \qquad \Pi = \int_0^\infty x\,dV(x)$$

$$\frac{dV_o(R)}{dk} = -\frac{R}{k^2} \int_0^\infty x\, e^{Rx/k}\, dV(x)$$

tendremos:

$$\frac{dC(k)}{dk} = \frac{(1+\lambda_r^1)}{k^2} - \frac{\frac{t}{k^2}\int_0^\infty x\, e^{Rx/k}\, dV(x)}{1 - t/h(V_o(R) - 1)}$$

la cual se anula para

$$\int_0^\infty x e^{Rx/k}\, dV(x) = \Pi(1 + \lambda_r^1)\left(1 - \frac{t}{h}(V_o(R) - 1)\right)$$

de donde se obtiene la cuota óptima k_o (que ha de cumplir $k_o > 1$)
Como facilmente puede comprobarse, la derivada segunda de $C(k)$ en el punto k_o, es positiva.

2.- Reaseguro excess-loss.

Teniendo en cuenta:

$$\frac{dP_r}{dM} = -t \int_M^\infty dV(x) = -t(1 - V(M))$$

$$\frac{dV_o(R)}{dM} = R\, e^{RM} \int_M^\infty dV(x) = R\, e^{RM}\,(1 - V(M))$$

tendremos:

$$\frac{dC}{dM} = -t(1+\lambda_r^1)(1-V(M)) + \frac{te^{RM}(1-V(M))}{1-t/h(V_o(R)-1)} = 0$$

es decir:

$$e^{RM} = (1+\lambda_r^1)(1 - t/h\ (\int_0^M e^{Rx}\ dV(x) + e^{RM}\int_M^\infty dV(x) - 1))$$

de la cual se obtiene el pleno óptimo M_o, ya que, como puede - comprobarse facilmente, se cumple:

$$\left(\frac{d^2C}{dM^2}\right)_{M=M_o} > 0$$

cuando $h \to \infty$ (proceso de Poisson) será:

$$M_o = (1/R)\ \ln\ (1+\lambda_r^1)$$

cuyo resultado fue obtenido por H,Lambert en 1.960. Para cualquier otro valor de h el pleno óptimo es menor.

3.- Reaseguro stop-loss.- Teniendo en cuenta:

$$\varphi_o(R) = \int_0^\infty e^{Rx}\ dF_o(x,t) = \int_0^N e^{Rx}\ dF(x,t) + e^{RN}\int_N^\infty dF(x,t)$$

$$P_r = \int_N^\infty (x-N)\ dF(x,t)$$

la función de coste será:

$$C(N) = (1+\lambda_r^1)P_r + \frac{1}{R}\ln\ (\int_0^N dF(x,t) + e^{RN}\int_N^\infty dF(x,t))$$

cuya primera derivada anulada

$$\frac{dC}{dN} = -(1+\lambda_r^1)(1 - F(N,t)) + \frac{e^{RN}(1-F(N,t))}{\varphi_o(R)} = 0$$

nos permite llegar

$$\int_0^N e^{Rx}\ dF(x,t) + e^{RN}\int_N^\infty dF(x,t) = \frac{e^{RN}}{1+\lambda_r^1}$$

que nos da el pleno óptimo N_o, ya que la segunda derivada es positiva. En efecto

$$C''=f(N)(e^{RN} - (1+\lambda_r^1)(\int_0^N e^{RN}dF(x,t) + e^{RN}\int_N^\infty dF(x,t))$$

donde $f(N)$ es una función positiva. En el punto N_o la derivada segunda vale:

$$C'' = f(N_o)\ Re^{RN_o}\ (1-(1+\lambda_r^1)\int_N^\infty dF(x_1t)) > 0$$

puesto que

$$\int_N^\infty dF(x_1t) < \frac{1}{1+\lambda_r^1}$$

c) Criterio basado en un orden de preferencias.- Siguiendo a K.Borch (66) establezcamos los supuestos:

1.- La compañía tiene un capital inicial S_o.

2.- La compañía recauda un total de primas P, mediante la adquisición de contratos de seguro que forman su cartera. La cantidad de siniestros a pagar por los producidos de entre los contratos que integran la cartera es una variable aleatoria, con función de distribución $F(x)$.

3.- La compañía puede reasegurar una parte k de su cartera mediante el pago de una prima $P(k)$ de reaseguro siendo $o \leq k \leq 1$.

El problema ha de consistir en determinar la parte que ha de ser reasegurada.

Si la compañía reasegura la parte k, cuando hayan expirado las pólizas de su cartera tendrá un capital

$$S_1(k) = S_o + P - P(k) - (1-k)x$$

El capital final $S_1(k)$ es , en general, una variable aleatoria que depende de k. Se trata de determinar el valor de k que de la mejor variable aleatoria en el conjunto $S_1(k)$, es decir, la mejor distribución de probabilidad del capital final que pueda obtenerse.

Este problema carece de sentido, a menos que el director de la compañía pueda establecer un orden de preferencias en cuanto a $S_1(k)$. Supongamos que dicha ordenación existe y que es compatible en el sentido de Von Neumann y Morgenstern. Entonces resulta posible representar el orden de preferencias valiendonos de una función de utilidad U(x) de forma que el - problema consista en determinar el valor de k que maxi ice:

$$\int_0^\infty U(S_o + P - P(k) - (1 - k)x)\, dF(x)$$

De esta forma el problema de reaseguro se ha convertido en uno muy similar al del director de la Teoría Económica Clà sica. En lugar de buscar hacer máximos los beneficios, el director busca las mejores distribuciones de probabilidad que - pueda obtener para los beneficios y que esta ordenación se - pueda representar valiendonos de una función de utilidad.

II.3.3. EL RECARGO DE SEGURIDAD

Otro de los elementos fundamentales del sistema de estabilidad es el recargo de seguridad.

Recordando las palabras del profesor Borch, "si una operación de seguro es ofrecida al público a una prima determinada por el principio de equivalencia, esto es, la prima es la esperanza matemática de la siniestralidad, el beneficio esperado de este negocio sería cero". En principio la falta de beneficio no es deseable, pero peor es la posibilidad de que se produzcan pérdidas constantes en las operaciones que dejarán imposibilitada a la empresa para el cumplimiento de sus obligaciones. Una solución indicada a este problema consiste en añadir a la prima calculada según el principio de equivalencia un recargo de seguridad de forma que el beneficio esperado sea positivo.

Tradicionalmente se considera que el beneficio esperado ha de ser tanto mayor cuanto mayores sean los riesgos. Para nosotros será de gran importancia la búsqueda de una definición y medida del riesgo, asi como encontrar sus relaciones con los beneficios esperados.

En general, llamaremos prima recargada a la suma de la prima pura (esperanza matemática de la siniestralidad) y el recargo de seguridad. Este puede venir dado en forma implícita o explícita, según que se encuentre incluido en forma implícita o no en la prima pura:

--En el primer caso diremos que la prima pura está calculada con bases de primer orden. Las causas de este hecho pueden sintetizarse en dos:

A.- Causas de tipo técnico: Retraso en el desarrollo de la matemática de los seguros no vida, debido en parte a la dificultad de operar con bases de segundo orden, dificultad mayor desde luego que en los seguros de vida.

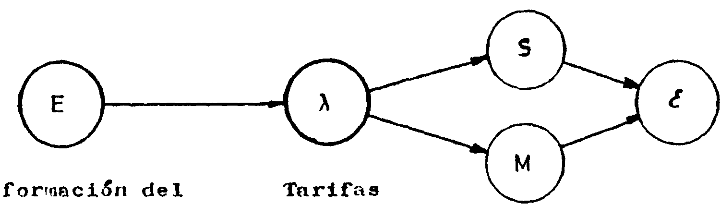
B.- Causas de tipo económico: Inadecuadas estructuras - en el sector del seguro, política de precios uniformes, escasa vinculación con el desarrollo económico-social etc.

-- En el segundo caso la prima pura estará calculada - con bases de segundo orden y coincidirá con la esperanza matemática de la siniestralidad

En nuestro análisis preliminar del recargo de seguridad vamos a introducir un elemento de gran importancia: el mercado, de su funcionamiento el recargo puede tener para la empresa dos significaciones completamente distintas:

a) El recargo de seguridad como dato.- lo normal si nos encontramos en un mercado de primas uniformes generalmente - calculadas con bases de primer orden donde, el recargo vendrá dado en forma implícita. Esto trae consigo una forma de comportamiento: en base a los márgenes implícitos existentes en las tarifas uniformes, se puede conseguir el grado de estabilidad deseado. El proceso normal suele ser el siguiente: tener pequeñas reservas S, que generalmente aparecen implícitamente en las reservas de primas o en las cifras de capitales mínimos. El reaseguro se verá favorecido por estos márgenes - existentes en las primas que permiten financiarlo más facilmente. Por otra parte, la escasez de reservas de estabilidad resta poder negociador a la empresa que tiene que acceder a las exigencias del mercado de reaseguro.

Podemos considerar el siguiente grafo para expresar esta idea:

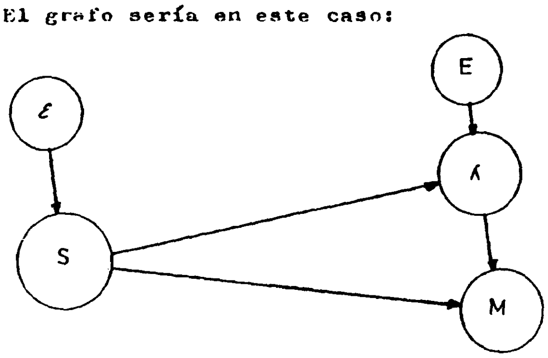


Información del mercado

Tarifas

b) El recargo de seguridad como variable de decisión.- En este caso nos encontramos en un marco de competencia. Si la prima pura esta calculada con bases de segundo orden, esto es, se corresponde con la esperanza matemática de la siniestralidad, la cuantía del recargo de seguridad vendrá definida por una parte, por la estabilidad de la compañía y por otra por el precio del seguro que no puede ser excesivamente alto ya que se perdería parte del mercado. En este punto sería de gran interés conocer la sensibilidad de la demanda al precio.

El grafo sería en este caso:



En adelante consideraremos el recargo de seguridad como variable de decisión.

Precisando algo más, podemos establecer dos objetivos básicos del recargo de seguridad:

-- Prevenir la ruina.

-- Proporcionar un beneficio.

En esta línea Edward Burnens (67) indica que el recargo de seguridad no es meramente un margen adiccional para corregir los posibles errores e insuficiencias en el cálculo de primas cuando la estimación de futuros costos de siniestralidad, futuros gastos y resultados de inversiones no tienen en cuenta sucesos imprevisibles como guerras o inflación; es además un suplemento, técnicamente necesario, a la prima en el sentido de que si el asegurador cobra sólo por siniestralidad y gastos sin establecer un recargo de seguridad incurrirá en una ruina cierta. Esto es cierto aun en el caso que el asegurador posea unas reservas (no ilimitadas) que puede utilizar para absorber las fluctuaciones de la siniestralidad en los diferentes períodos. El mecanismo será el siguiente: parte del recargo de seguridad servirá para absorber las fluctuaciones anuales que excedan los siniestros esperados, mientras que la otra parte se llevará a las reservas libres asegurando la solvencia a largo plazo de la compañía. Si en un año dado la primera parte no es enteramente absorbida por las fluctuaciones de siniestralidad, el remanente puede ser considerado como beneficio. Si por el contrario éstas superan a aquella, no existirá beneficio en el período, habiendo de ser utilizadas las reservas libres para compensar el exceso de siniestralidad en su totalidad.

Formalicemos esta idea. Sean (68):

I_t = ingresos técnicos.

G_t = gastos técnicos.

R = dotación a la reserva de estabilidad.

B_t = beneficio técnico del ejercicio.

su relación es la siguiente:

$$I_t - G_t = R + B_t$$

es decir, la diferencia entre ingresos y gastos técnicos ha de ser igual a la dotación a la reserva de fluctuación mas el beneficio técnico. Supongamos en una simplificación que los ingresos técnicos vienen dados por las primas recargadas P_1 (prima pura mas recargo de seguridad) y que tomamos los siniestros como los gastos técnicos, tendremos entonces:

$$P_1 - S = R + B_t$$

siendo S los siniestros.

Llamaremos coeficiente de ganancia a aquel porcentaje - de las primas recargadas que se toma como ingreso para la determinación del beneficio técnico imputable al ejercicio:

$$B_t = KP_1 - S \qquad\qquad 0 \leq K \leq 1$$

siendo K dicho coeficiente.

En un determinado ejercicio tendremos unas primas P_1 y unos siniestros. Se nos podrán presentar los siguientes casos:

a) $S < KP_1$. Entonces:

$B_t = KP_1 - S > 0$

$R = (1-K).P_1 > 0$

$$B_t + R = P_1 - S$$

es decir, el beneficio técnico es positivo y hay dotación de reservas de estabilidad.

b) $KP_1 < S < P_1$. En este caso el beneficio técnico será nulo, habiendo sin embargo, dotación de reservas. Es decir:

$$B_t = 0$$

$$R = P_1 - S > 0$$

la dotación de reservas será por la diferencia entre las primas recargadas y los siniestros del ejercicio.

c) $S > P_1$. Entonces:

$$B_t = 0$$

$$R = P_1 - S < 0$$

los resultados técnicos son negativos y se enjugarán con las reservas constituidas, cuando éstas sean insuficientes, habrá necesidad de financiar la desviación de siniestralidad con el capital (u otras reservas no técnicas)

El coeficiente de ganancia K debe estar relacionado con la siniestralidad extraordinaria prevista. Podemos definir dicha siniestralidad en la siguiente forma:

$$S_e = S - KP_1 \qquad \text{para } S > K.P_1$$

teniendo en cuenta que: KP_1 son los siniestros imputables al ejercicio; $(1-K)P_1$ son los ingresos para daños extraordinarios

Una posible definición de K podría ser:

$$(1 - K)P_1 = E(S_e)$$

considerando además de la media, la desviación típica de la siniestralidad extraordinaria tendremos una definición más prudente:

$$(1 - K)P_1 = E(S_e) + c\sigma(S_e)$$

II.3.3.1 CALCULO DEL RECARGO DE SEGURIDAD.

Distinguiremos dos criterios. El primero de ellos establece el recargo de seguridad en función del riesgo corrido - por el asegurador; el segundo será un criterio de estabilidad en base a la Teoría del Riesgo Colectivo.

II.3.3.1.1. Recargo de seguridad en función del riesgo.

El riesgo para la entidad aseguradora proviene de la posibilidad de que una siniestralidad desfavorable le impida - hacer frente a sus obligaciones.

Es necesario por tanto establecer una apropiada medida del riesgo. En este apartado analizaremos algunas de las propuestas por diferentes autores indicando sus ventajas e inconvenientes para afrontar el problema que nos ocupa.

Buhlmann (69) indica los siguientes principios en que puede basarse el cálculo de la prima recargada:

a) Principio del valor esperado.

Según el mismo la prima recargada vendrá dada por la expresión:

$$P' = (1 + \lambda) \cdot E(x) \qquad \lambda > 0$$

donde $E(x)$ es la esperanza matemática de la siniestralidad.

b) Principio de la desviación típica.

En este caso tendremos:

$$P' = E(x) + \alpha\,\sigma(x) \qquad \alpha > 0$$

donde $\sigma(x)$ representa la desviación típica de la siniestralidad.

c) Principio de la varianza

Según él mismo:

$$P' = E(x) + \beta V(x) \qquad \beta > 0$$

siendo $V(x)$ la varianza de la siniestralidad.

d) El principio de utilidad cero.

La prima es determinada a partir de la ecuación:

$$E(u(P - x)) = u(0)$$

donde $E(\ )$ es el valor esperado de la apropiadamente elegida función de utilidad $u(x)$, donde $u'(x) \geq 0$ y $u''(x) \leq 0$; esto - es, la utilidad se incrementa monotonamente y la utilidad marginal disminuye monotamente.

Este principio requiere que la utilidad $u(0)$ antes de - asumir la responsabilidad de la exprefiencia de siniestros es igual a la utilidad esperada $E(u(P - x))$ despues de tomar tal responsabilidad a cambio de una prima P.

También, siguiendo los trabajos de diversos autores, estudiaremos las siguientes fórmulas:

e) En base a la semivarianza

Tendremos:

$$P' = E(x) + \delta . V_+(x) \qquad \delta > 0$$

siendo $V_+(x)$ la semivarianza.

$$V_+(x) = \int_E^{\infty} (x - E(x))^2 \, dF(x)$$

y $F(x)$ la función de distribución de la siniestralidad total.

f) Considerando la asimetría de la distribución

En este caso haremos uso del coeficiente de asimetría:

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3(x)}$$

donde es

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^3 \cdot dF(x)$$

g) Criterio de la perdida esperada

El recargo vendrá en función de:

$$E(L) = \int_{E}^{\infty} (x - E(x)) \, dF(x)$$

h) Recargo en funcion del cociente de la varianza y las reservas de la entidad.

En este caso consideraremos la relacion:

$$\frac{V(x)}{S}$$

i) Recargo en función del elemento sistematico de la varianza.

Aqui daremos entrada a las nuevas aportaciones, del desarrollo de la teoría de la cartera.

El elemento sistemático de la varianza, coeficiente "beta" servirá como medida del riesgo.

Pasemos, pues, a estudiar las ventajas e inconvenientes de los distintos métodos propuestos, comparando algunos de ellos entre sí. Posteriormente, en base a criterios de estabilidad observaremos desde una nueva perspectiva el recargo de seguridad.

B. Berliner (70) señala las propiedades que ha de poseer un principio de cálculo de primas:

-- La prima ha de ser explicitamente calculable.

-- El principio utilizado nos debe llevar a una solución única.

-- La información está a menudo, en la práctica, dispersa y por tanto el mejor será el que menos información precise para el cálculo de una prima razonable.

-- En la práctica, tendremos a menudo poco tiempo y no dispondremos de elementos auxiliares de ayuda tales como computadores y programas de computador para calcular las primas. Es conveniente que el principio de cálculo de primas no nos lleve a difíciles, complicados o cálculos que consuman gran cantidad de tiempo.

-- La prima ha de ser al menos tan grande como el costo esperado de siniestros

-- La prima ha de tener un valor finito.

En los casos en los que $E(x)$ ó $\sigma(x)$ no tengan un valor finito, Berliner recomienda tomar la función de distribución truncada o bien, una función de distribución "vecina" que posean esperanza matemática y desviación típica finitas.

A. Principio del valor esperado.

Siguiendo la ya citada obra de Bulhmann, este principio es muy utilizado en el seguro de vida y raramente lo es en los seguros de cosas y accidentes. Esto último es fundamentalmente debido a no ser apropiado para riesgos heterogeneos que no permiten un cálculo promedio.

B. **Principio de utilidad cero**

Para el mismo autor este principio es de gran interés desde el punto de vista teórico, presentando las dificultades prácticas de la selección de hipótesis sobre la función de utilidad.

Hemos de tener en cuenta, como señala Berliner, que en este principio sólo existe una solución explícita para ciertas funciones de utilidad.

Un caso de interés es áquel en el que la función de utilidad es un polinomio de segundo grado, esto es:

$$u(x) = x - x^2/2c \qquad \text{para } x < c$$

en este caso tendremos:

$$P' = E(x) + c - \sqrt{c^2 - V(x)} =$$

$$= E(x) + V(x)/2c \qquad \text{para } V(x) < c$$

en este caso el principio de utilidad nulo coincide, en una primera aproximación con el principio de la varianza si tomamos:

$$\beta = \frac{1}{2c}$$

con lo que tendriamos que: $P' = E(x) + \beta\, V(x)$

C. **Principio de la desviación típica**

Como ya indicamos, según él mismo:

$$P' = E(x) + \alpha\sigma(x)$$

Veamos algunas de las propiedades cumplidas por este principio. Estas serán estudiadas en comparación con el principio de la varianza, de forma que nos fijaremos en las que el último no cumple y sí el de la desviación típica.

Berliner (71) indica las siguientes:

1.- Un recargo en base a la desviación típica surge como resultado de la incertidumbre estadística. Sea E el verdadero, y desconocido, valor esperado de la siniestralidad total y E^* una estimación de E. E^* puede ser, por ejemplo, la media indexada de la siniestralidad total durante los últimos n años.

Ya que, como muestra la teoría del riesgo, no es suficiente tomar E como prima, es mucho más peligroso tomar como prima E^*. Para reducir el peligro de una estimación baja de E, es natural reemplazar E^* por $E^* + \alpha\sigma$, donde la probabilidad

$$P(E^* + \alpha\sigma > E) = 1 - \eta \qquad 0 \leq \eta \leq 1$$

dependiendo α de el valor de η elegido.

2.- El principio de la desviación típica es proporcional con respecto a un cambio proporcional en la experiencia de siniestros.

En el anteriormente citado trabajo de Burnens encontra mos la siguiente demostración:

Supongamos que la siniestralidad de una cartera de seguros tiene una distribución normal de parámetros (t, σ), donde t es el número esperado de siniestros. Tendremos que la probabilidad de que la siniestralidad anual total exceda la esperada y α veces la desviación tipica

$$P\ (x > t + \alpha\sigma) = 1 - \phi(\alpha) \qquad \alpha > 0$$

Hemos supuesto, sin perdida de generalidad que el tamaño medio de un siniestro es igual a 1.

El problema nace de si bajo unas más generales condiciones la probabilidad de pérdida antes definida depende solo de α. Esto hablaría en favor del principio de la desviación típica. Si esto fuera cierto y pudieramos escribir que:

$$P(x > t + \alpha\sigma) = f(\alpha)$$

añadiendo un porcentaje fijo de la desviación típica a las primas, tendríamos la seguridad de que con una probabilidad dada $f(\alpha)$ la siniestralidad total no excederá a las entradas totales de primas.

Generalicemos entonces las condiciones. Basaremos nuestra demostración en la distribución de Poisson Generalizada con fluctuaciones en las probabilidades básicas de la Teoría del Riesgo Colectivo:

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) . V^{n(\nu)}(x) \qquad (1)$$

ya conocida por nosotros, donde el número esperado de siniestros viene dado por una distribución de Poisson compuesta en la forma:

$$P_n'(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \, dU(\lambda)$$

y

$$U(\lambda) = 1/\rho(k) \int_0^{ak} e^{-y} y^{k-1} \, dy$$

donde k es el parámetro de fluctuación mide las fluctuaciones en las probabilidades básicas y puede ser interpretado como una medida del riesgo de contagio, esto es, de la interdependencia de los riesgos individuales.

Como ha sido demostrado por H. Bohman y Esscher (72) la función

$$G(z,a) = 1/\rho(a) \int_0^{(z+\sqrt{a})\sqrt{a}} e^{-y} y^{a-1} \, dy \qquad \text{(II)}$$

con

$$a = 4/\gamma^2$$

donde γ representa la asimetría de la distribución (I), da una buena aproximación de la distribución tipificada:

$$F(t + z\sigma, t) \qquad \text{(III)}$$

correspondiente a (I). Los citados autores demostraron que los tres primeros momentos de (II) coinciden con los de (III), esto es tienen la misma media, varianza y asimetría. Más aún tienen el mismo límite:

$$\lim_{t \to \infty} G(z,a(t)) = \lim_{t \to \infty} F(t + z\sigma, t)$$

Encontramos entonces la siguiente aproximación para la probabilidad de que la siniestralidad total exceda el valor esperado y α veces la desviación típica:

$$P(x > t + \alpha\sigma) = \int_{\alpha}^{\infty} dF(t + z\sigma, t) \sim \int_{\alpha}^{\infty} dG(z,a)$$

diferenciando $G(z,a)$ con respecto a z e introduciendolo en la última integral obtendremos

$$P(x > t + \alpha\sigma) = a/\rho(a) \int_{\alpha}^{\infty} ((z + \sqrt{a})\sqrt{a})^{a-1} e^{-(z+\sqrt{a})\sqrt{a}} dz$$

esto es una expresión

$$P(x > t + \alpha\sigma) \sim f(\alpha, \gamma) \qquad \text{(IV)}$$

que depende solo de α y de $a = 4/\gamma^2$

Como $\alpha = \alpha(t)$ es una función de t, nuestra probabilidad de pérdida tambien depende de t, pero como la asimetría de una distribución de siniestros de una cartera dada permanece constante, podemos esperar tener una relación aproximada a la primera. Obviamente el resultado (IV) no solo es cierto para una función como la (II) , simo para cualquier otra distribución $G(z,a,1,\gamma)$ de la distribución tipificada (III); la función (II) es una particularmente buena aproximación a la distribución de Poisson generalizada ya que ambas tienen el mismo límite para $t \to \infty$.

Este interesante resultado ha sido confirmado con ejemplos numéricos. Sucede que en el amplio campo de las funciones de Poisson generalizadas con probabilidades básicas constantes o fluctuantes (sin imponer restricciones a la distribución de la cuantía de un siniestro) si dos distribuciones que tienen la misma asimetría, tendrán tambien las mismas probabilidades de pérdida $P(x > t + \alpha\sigma)$ para un valor especificio de α.

3.- Si suponemos que la probabilidad de obtener un resultado negativo añadiendo un tratado marginal a la cartera no debe incrementarse para el asegurador, llegaremos a un recargo en base a la desviación típica como una primera aproximación en el caso de normalidad para la parte marginal del -- tratado cuyos resultados son dependientes de los resultados - de la cartera del asegurador.

En este punto estudiaremos que tipo de recargo será el - que tengamos que utilizar para que en el caso de incorporar un nuevo conjunto de pólizas a nuestra cartera, no se deteriore la situación de riesgo. Llegaremos a la conclusión de que según los casos será indicado un recargo en base a la desviación típica o la varianza.

Supongamos con B. Berliner, que un asegurador posee unas reservas libres de U y dispone de una cartera caracterizada por la función de distribución $F_x(z;\mu,\sigma^2)$. X es una variable aleatoria que describe la pérdida acumulada durante un cierto periodo de tiempo; μ y $\sigma^2 = V$ son el valor esperado y la varianza de X respectivamente.(73)

Supongamos, también, que las entradas de primas del asegurador son $P = \mu + L$ donde $L > 0$ es el recargo.

La compañia esta preparada para introducir en su cartera un tratado adiccional, que puede estar caracterizado por la - función de distribución $G_y(z;\mu_1, \sigma_1^2)$ donde $\mu_1 \leq \mu$, $\sigma_1^2 \leq \sigma$; si es aceptado no debe causar un deterioro en nuestra situación de riesgo.

Benktander utiliza dos critèrios para describir lo que se entiende por una situación de riesgo no deteriorada. Será àquella en la cual:(74)

-- El riesgo de obtener un resultado negativo no se - incrementa.

-- La esperanza mátematica de tal resultado negativo - no se incrementa.

Este mismo autor suponiendo que $F_x(z)$ y $G_y(z)$ sean funciones de distribución normales y X e Y sean independientes de-muestra que ambos criterios dirigen a un recargo para el nuevo tratado adiccional en base a la varianza.

En concreto usando el primero de los criterios enunciados llega a la siguiente fórmula:

$$P' = \mu + 1 = \frac{L + U}{2} \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}\right) + 0 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma^4}\right)$$

En esta misma linea, examinemos el estudio que realiza Berliner:

Si X e Y tienen simultaneamente distribución normal cuyes valores esperados son μ_1 y μ_2 sus varianzas son σ^2 y σ_1^2 el coeficiente de correlación ρ. X caracteriza la situación de riesgo e Y el tratado adiccional.

Y puede ser dividida en dos partes, una totalmente dependiente de X y otra que es independiente de X.

$$Y = \lambda X + Z;$$

$$E(XZ) = E(X).E(Z)$$

El coeficiente de regresión λ vendrá dado por:

$$\lambda = \rho\,(\sigma_1/\sigma)$$

$$\sigma_y^2 = \lambda^2\sigma_x^2 + \sigma_z^2$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_y^2 - \lambda^2\sigma_x^2 = \sigma_1^2 - \lambda^2\sigma \geqslant 0$$

Entonces

$$\lambda^2 \leq \sigma_1^2/\sigma^2 \leq 1$$

El primero de los criterios de Benktander de que el riesgo de obtener un resultado negativo no debe incrementarse puede ser expresado en la siguiente forma:

$$P\,(X + Y \geqslant \mu + \mu_1 + L + 1 + U) \leq P\,(X > \mu + L + U)$$

si utilizamos el signo igual, entonces, pretenderemos que la aceptación de un nuevo conjunto de pólizas no incrementará nuestra probabilidad de ruina(permanecerá igual).

$$P(X + Y > \mu + \mu_1 + L + 1 + U) = P((1+\lambda)X + Z > \mu + \mu_1 + L + 1 + U)$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{L + 1 + U}{(1+\lambda)^2\sigma^2 + \sigma_z^2}\right) = P(X > \mu + L + U) =$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{L + U}{\sigma}\right)$$

Hemos usado el hecho de que al ser la función de distribución de (X,Y) normal bivariada, la función de distribución de X + Y es normal.

De lo anterior se sigue que:

$$\frac{L + U}{\sigma} = \frac{L + 1 + U}{\sigma\sqrt{1 + 2\lambda + \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}}}$$

y usando las primeras relaciones, podemos escribir lo siguiente:

$$L + 1 + U = (L + U)\left(1 + \lambda + \frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} - \frac{1}{8}4\lambda^2 + O\left(\frac{\sigma_1^3}{\sigma^3}\right)\right)$$

$$1 = \frac{L + U}{2}\sigma_1^2 + \lambda (L + U)(1 - \tfrac{1}{2}\lambda) + O\left(\frac{\sigma_1^3}{\sigma^3}\right)$$

La parte no dependiente del coeficiente de regresión que caracteriza la magnitud de la dependencia de X e Y es identico que el resultado de Benktander:

$$1 = \frac{L + U}{2}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^2 + O\left(\frac{\sigma_1^4}{\sigma^4}\right)$$

en caso de independencia entre X e Y.

Sustituyendo $\rho\,(\sigma_1/\sigma)$ por λ , llegamos a

$$1 = \left(\rho\frac{\sigma_1}{\sigma} - \tfrac{1}{2}(1 - \rho^2)\frac{\sigma_1^2}{\sigma}\right)(L + U) + O\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma}\right)$$

que para $\rho = 0$ llegamos al recargo basado en la varianza.

En caso que $\rho = 1$ llegaremos a un recargo basado en la desviación típica. Esto es:

$$1 = (L + U)\frac{\sigma_1}{\sigma} + O\left(\frac{\sigma_1^3}{\sigma^3}\right)$$

Podemos concluir que: <u>cuanto mayor sea la dependencia entre X e Y mayor relevancia tendrá un recargo basado en la desviación típica que uno basado en la varianza.</u>

4.-El coeficiente α de

$$P' = E(x) + \alpha\,\sigma(x)$$

es un número y no tiene dimensión.

D. Principio de la varianza

Como ya hemos visto, según este principio la prima vendría dada por:

$$P' = E(x) + \beta V(x)$$

donde la varianza de la siniestralidad V(x) es:

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 \, dF(x)$$

Siguiendo de nuevo a Berliner podemos citar las siguientes propiedades cumplidas por el principio de la varianza y no por el de la desviación típica y que a su parecer hacen más apropiado al primero de ellos para el calculo de la prima.

1.- El principio de la varianza es aditivo, esto es, la prima asignada a la suma de dos riesgos independientes es igual a la suma de las primas que son asignadas a dos riesgos independientemente.

2.- Para una gran clase de funciones infinitamente divisibles, llegamos en una primera aproximación a un recargo basado en la varianza si una compañía suma un tratado marginal independiente a su cartera sin cambiar la probabilidad de obtener un resultado negativo. Esta propiedad ya fue demostrada anteriormente basandonos en un trabajo de Berliner (75) y tambien podemos estudiarlo según un trabajo de Berktander (76)

3.- Un recargo basado en la varianza puede ser interpretado, otra vez como aproximación, como un precio por la "capacidad" que el asegurador pone a disposición del asegurado, don de la tasa de beneficio será proporcional a dicha "capacidad" podemos acudir en este caso a otro estudio de Berktander (77).

4.- El principio de la varianza conduce a un equilibrio en el mercado del seguro. La mayor capacidad del mercado es usada (dependiendo de la capacidad de aseguradores y reaseguradores y sus deseos de asumir riesgos) a los más bajos precios de cobertura del riesgo. Para cada cobertura existe un precio mínimo (78)

5.- Un recargo basado en la varianza conduce a unos límites naturales para asegurador y reasegurador ya que, como - consecuencia de la segunda propiedad el precio excedería la - cantidad asegurada en algun punto.

Desde luego el límite de aceptación será normalmente mucho más baja que la cantidad asegurada y dependerá de la situación competitiva del mercado tanto como del deseo de asumir riesgo de aseguradores y reaseguradores.

Para una prima dada y por tanto un margen de beneficio esperado, el deseo de asumir riesgo por parte del asegurador (reasegurador) determina la parte del mercado que esta preparado para aceptar.

6.- Un recargo en base a la varianza es apropiado para aplicar técnicas de credibilidad (79)

7.- Como hemos visto la primera aproximación no trivial del principio de utilidad cero conduce a este tipo de recargo.

8.- El coeficiente tiene dimensión (unid.monetaria)$^{-1}$

E. **Principio de la semivarianza**

Si consideramos la varianza como medida del riesgo para el asegurador, es natural preguntarnos si las desviaciones negativas (80)

$$x - E(x) \quad \text{con} \quad x < E(x)$$

donde como ya sabemos:

$$E(x) = \int_{\infty}^{\infty} x \, dF(x)$$

que están a favor del asegurador pueden ser llamadas riesgo.

Si nosotros respondemos "no" a esta pregunta, la consecuencia sería reemplazar en el cálculo de primas de una cartera el principio de la varianza, según el cual

$$P' = E(x) + \beta . V(x) \qquad \beta > 0$$

por el principio de la semivarianza:

$$P' = E(x) + \hat{e} \; V_+(x) \qquad \hat{e} > 0$$

donde

$$V = V_+ + V_- = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 \, dF(x)$$

y

$$V_+ = \int_{E}^{\infty} (x - E(x))^2 \, dF(x)$$

$$V_- = \int_{-\infty}^{E} (x - E(x))^2 \, dF(x)$$

Hagamos una revisión de las propiedades de la semivarianza y a partir de ellas una comparación del principio de la semivarianza con otros como el de la varianza o el del coeficiente de asimetría para obtenr alguna conclusión sobre lo apropiado de los mismos.

Para nuestro propósito podemos señalar las siguientes propiedades:

1.- V_+ depende solamente del valor esperado $E(x)$ de la función de distribución $F(x)$ y de la estructura de $F(x)$ para los valores $x \geq E(x)$.

2.- $V_+ \leq V$

Por tanto, si reemplazamos en el cálculo de la prima la varianza por la sèmivarianza, deberemos aumentar el coeficiente del recargo.

3.- Para

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x.g(x)\ dx = E(x)$$

y siendo

$$f(x) \leq g(x) \qquad \text{para} \qquad x \geq E(x)$$

tendremos que

$$V_{+f} \leq V_{+g}$$

4.- Supongamos un punto de intersección $x > E(x)$ y sea

$$f(\hat{x}) = g(\hat{x}),$$

$$f(x) > g(x) \quad \text{para} \quad E(x) \leq x < \hat{x} \qquad \text{y}$$

$$g(x) > f(x) \quad \text{para} \quad x > \hat{x}$$

supongamos tambien que:

$$\int_{E}^{\hat{x}} (x - E(x))^{1+\eta}\ (f(x) - g(x))\ dx \leq$$

$$\leq \int_{\hat{x}}^{\infty} (x - E(x))^{1+\eta}\ (g(x) - f(x))\ dx \text{ con } -1 \leq \eta < 1$$

Entonces obtendremos $V_{+f} < V_{+g}$

Probémoslo:

$$\int_E^{\hat{x}} (x - E(x))^2 \ (f(x) - g(x)) \ dx <$$

$$< (\hat{x} - E(x))^{1-\eta} \int_E^{\hat{x}} (x - E(x))^{1+\eta} (f(x) - g(x))dx$$

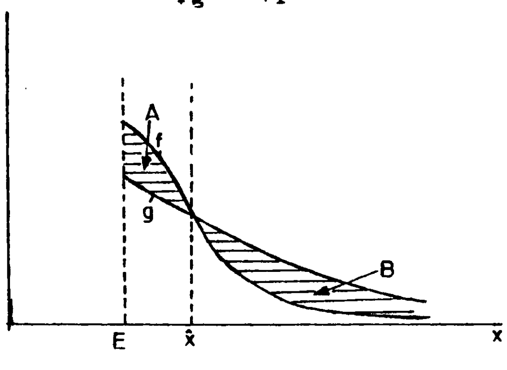
$$\leq (\hat{x} - E(x))^{1-\eta} \int_{\hat{x}}^{\infty} (x - E(x))^{1+\eta} (g(x) - f(x))dx$$

$$< \int_{\hat{x}}^{\infty} (x - E(x))^2 \ (g(x) - f(x))dx$$

$$\Longrightarrow \int_{\hat{x}}^{\infty} (x - E(x))^2 (g(x) - f(x))dx - \int_E^{\hat{x}} (x - E(x))^2 (f(x) - g(x))dx$$

$$= \int_E^{\infty} (x - E(x))^2 (g(x) - f(x))dx =$$

$$= V_{+g} - V_{+f} > 0$$



Examinando la figura anterior, podemos ver que:

-- Para $\eta = -1$

$$A = \int_E^{\hat{x}} (f(x) - g(x))dx \leq \int_{\hat{x}}^{\infty} (g(x) - f(x))dx = B$$

$$\Rightarrow V_{+f} < V_{+g}$$

-- Para $\eta = 0$

$$E_{+I} = \int_E^{\infty} (x - E(x))g(x)dx \geq \int_E^{\infty} (x - E(x))f(x)dx = E_{+II}$$

$$\Rightarrow V_{+I} > V_{+II}$$

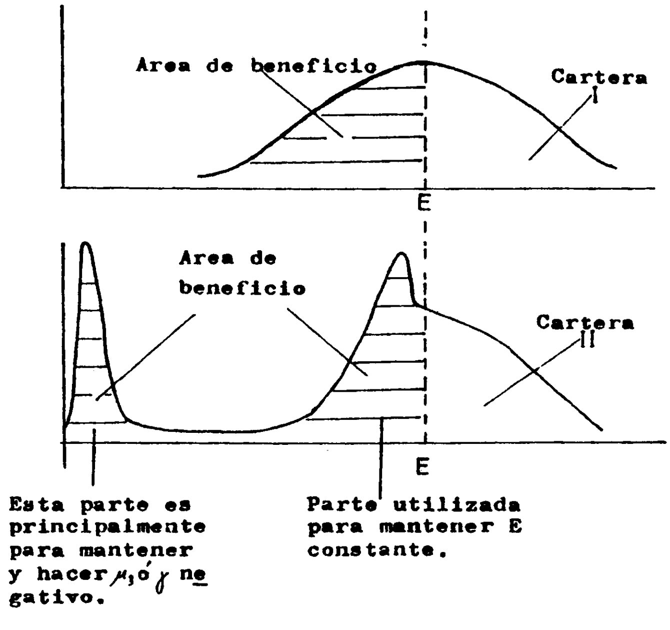
esto es, si dos carteras I y II, caracterizadas por las funciones de densidad $g(x)$ y $f(x)$, que tienen el mismo valor medio $E(x)$, y sus costos esperados $E_{+I} > E_{+II}$ entonces los recargos en base a la semivarianza son $V_{+I} > V_{+II}$.

Más adelante plantearemos la posibilidad de utilizar el costo esperado como un recargo alternativo al basado en la desviación típica.

5.- De la anterior propiedad y la figura anterior podemos deducir que la semivarianza V_+ será mayor cuanto mayores sean las probabilidades de los siniestros más alejados hacia la derecha de $E(x)$.

Podriamos pensar que V_+ esta fuertemente relacionado con el tercer momento central μ_3 de la distribución que, hasta un cierto grado (más adelante lo plantearemos) caracteriza la "peligrosidad" de una función de distribución o una cartera.

Como ya veremos, el argumento usado a menudo es que dados dos riesgos o carteras que tienen la misma media y varianza, la que tenga un mayor tercer momento central μ_3 ó asimetría γ es menos deseable para el asegurador por ser más peligrosa. Este argumento es correcto para la mayoría de las funciones de distribución utilizadas en seguros. Imaginemos, sin embargo, una con parámetros que podríamos cambiar de forma que la media, la varianza y la distribución para $x > E(x)$ permanecen iguales, mientras que disminuimos constantemente μ_3 aumentan-



do las posibilidades de importantes beneficios, como podemos observar en la figura (cartera II)

Tendremos:

$$E_I = E_{II}; \; V_I = V_{II} \;, \; V_{+I} = V_{+II} \;;$$

$$\mu_{3I} > \mu_{3II} \;; \; \gamma_I > \gamma_{II}$$

¿Podría una compañía de seguros decir que la cartera I es más peligrosa que la II y preferir esta última a la primera?.

¿ Podemos hablar de peligrosidad cuando nos referimos sólo a beneficios?.

Pensamos que no, especialmente cuando la compañía utiliza el beneficio $Z=P - x$ con funcion $u(Z)$ con $u'(Z) > 0$ y $u''(Z) < 0$ tal que $E_I(u(Z/Z > P - x)) > E_{II}(u(Z/Z > P - x))$.

De lo anterior se sigue que de $V_{+I} \leq V_{+II}$ no se obtiene $\mu_{3I} \leq \mu_{3II}$ o bien de

$$\frac{V_{+I}}{V_I} \leq \frac{V_{+II}}{V_{II}} \qquad \text{no se sigue} \qquad \gamma_I \leq \gamma_{II}$$

Con lo cual podemos concluir que V_+ es mejor medida del riesgo con respecto a la palabra peligrosidad, que V ó μ_3 o una combinación lineal de ambos $cV + d\,\mu_3$ como propone algún autor

Berliner concluye su estudio comparando la variaza y la semivarianza con el fin de encontrar una medida apropiada del riesgo para el recargo.

Si bien Markowitz (81) indica que la semivarianza produce mejores carteras que aquellas basadas en la varianza, la elección entre ellas es un problema distinto para el cálculo de primas.

Veamos algunas desventajas que posee la semivarianza respecto a la varianza:

1.- Un recargo en base a la varianza es aditivo, estoes como ya vimos, el recargo asignado a la suma de sos riesgos independientes es igual a la suma de los recargos que son asignados a los dos riesgos independientemente.

Un recargo en base a la semivarianza, no posee la propiedad de aditividad.

2.- Normalmente la semivarianza es más difícil y más larga de calcular que la varianza.

Por ejemplo, si deseamos calcular la prima de una cartera de n riesgos independientes cada uno de los cuales tiene una distribución $F_1(x),\ldots\ldots,F_n(x)$, entonces en el caso del recargo basado en la varianza, solo necesitaremos calcular las varianzas de cada riesgo y sumarlas; en caso de un recargo en base a la semivarianza hemos de calcular la convolución de las distribuciones y después su semivarianza, la primera de las operaciones suele ser larga y difícil en ocasiones.

3.- Para una gran clase de infinitamente divisibles funciones llegamos en una primera aproximación a que con un recargo basado en la varianza si la compañía añade un tratado independiente a su cartera, no cambia su probabilidad de resultados negativos.

Esta propiedad no la posee la semivarianza.

Berliner en base a lo anterior concluye que la varianza debe ser preferida usualmente a la semivarianza como una medida del riesgo a efectos de seguro.

Sin embargo no excluye la posibilidad de que para casos especiales la semivarianza puede ser preferible a la varianza.

F. Recargo considerando la asimetría de la distribución

Como ya se ha indicado, dos distribuciónes con la misma media y varianza pueden tener distinta peligrosidad en función de su asimetría. Tambien vimos algún caso en que la peligrosidad no varia y si lo hace su asimetría. Según esto propondremos una prima:

$$P' = E(x) + \beta V(x) + d.\mu_3$$

donde d es un coeficiente de dimensión (unidad monetaria)$^{-2}$ podriamos poner en su lugar el coeficiente de asimetría cuyo coeficiente sería adimensional.

A lo dicho anteriormente al estudiar la semivarianza sobre la asimetría podemos añadir que; 1.- la adicción de $d.u_3$ no invalida alguna de las propiedades más importantes que cumple el principio de la varianza como es la aditividad y la existencia de límites de aceptación permanece . 2.- la introducción de momentos centrales de orden superior al tercero puede romper esta propiedad de aditividad. 3.- μ_3 puede ser negativo con lo cual podemos tener un caso en que la prima sea menor que la esperanza matemática de la siniestralidad

G. Criterio de la pérdida esperada

Ya fue planteado al estudiar la semivarianza, según él la prima será:

$$P' = E(x) + a\ E(L)$$

donde

$$E(L) = \hat{E}_+ = \int_{\varepsilon}^{\infty} (x - E(x))\ dF(x)$$

Enumeremos algunas propiedades de $\hat{E}_+$ en comparación con las de la desviación típica:

1.- Como el principio de la desviación típica, no es aditivo.

2.- Como σ, E es calculada en unidades monetarias.

3.- $\hat{E}_+$ puede ser aproximada para un gran número de funciones de distribución que son a menudo usadas en seguros - por la fórmula $E = E.P_\lambda(\lambda)$ con $\lambda = E^2/V(x)$ y $P_\lambda(v)$ un proceso de Poisson.(82).

4.- Para Bowers $\hat{E}_+ < o.5.\sigma$; y según Benktander $\hat{E}_+ = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \simeq o.4.\sigma$.

5.- $\hat{E}_-$ generalmente toma en cuenta la asime-tría de las más importantes funciones de distribución en menor medida que y puede por tanto conducir a una baja tarifa en carteras peligrosas (83)

Para Berliner E no debe ser preferido a la desviación - típica.

Según Berger (84) el precio del riesgo puede ser medido por la perdida esperada. $\Delta_r = E(L)$ en su terminología

Por el desarrollo de Edgeworth encontramos que:

$$\Delta_r = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2}{4!}\right) + \ldots\ldots = 0.4\sigma$$

Si expresadmos las reservas S como múltiplos de pondremos

$$A_i = S.j_1 = v.j_1.\sigma$$

y de aquí

$$P' = E(x) + (v.j_1 + 0.4).\sigma$$

Coincide con el principio de la desviación típica.

H. Recargo proporcional a $V(x)/S$

Consideremos con Harald Bohman una cartera de seguros y sea Y la variable aleatoria que representa el resultado - neto anual de la cartera, esto es primas menos siniestros y gastos. (85)

Sea m el valor medio de Y y σ su desviación típica. La reserva de riesgo será denominada por S; m será positivo ó 0.

Para Bohman la cartera cumple la "solvencia estandar" si $S > 4\sigma$ esto equivale a decir que S el lo suficientemente grande para que con probabilidad cercana a 1 cubra los resultados desfavorables del siguiente año.

Y diremos que la cartera cumple con una "rentabilidad estandar" si $m > 4\sigma^2/S$.

Para explicarlo hagamos el siguiente razonamiento:

Sea S_o las reservas actuales, $Y_1, \ldots, Y_n$ los resultados de n años. El tamaño de la reserva al final de esos n años será $S_o + \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Esta es una variable aleatoria con valor medio igual a $(S_o + n.m)$ y varianza igual a $n.\sigma^2$. Con probabilidad cercana a 1 diremos que el valor de la variable será mayor que su media menos cuatro veces la desviación típica. O lo que es lo mismo, la reserva al final de los n años será - mayor que $S_o + n.m - 4.\sigma.\sqrt{n}$.

Nosotros desearemos que para todo n se cumpla la desigualdad $S_o + n.m > 4.\sigma.\sqrt{n}$.

Si reemplazamos m por su límite inferior y hacemos uso de la relación $x^2 + y^2 > 2xy$ encontramos que;

$$S_o + n.m \geq S_o + 4.n.\sigma^2/S_o \geq 4.\sigma.\sqrt{n}.$$

Nuestra definición de solvencia y rentabilidad estándar será usada para resolver el siguiente problema: dada una cartera de seguros con una cierta reserva de riesgo consistente en k contratos. Cada contrato tiene una media m_i y varianza σ_i^2, $(V_i(x))$. Cada contrato cumple la rentabilidad estándar, - esto es, $m_i > 4\sigma_i^2/S$. Tenemos la oportunidad de incluir un nuevo contrato de seguros en la cartera el (k-1). ¿Bajo que condiciones lo haremos?. Supongamos que el nuevo contrato cumple la rentabilidad estandar,esto es, $m_{k-1} > 4\sigma_{k-1}^2/S$, encontramos que la cartera total cumple la rentabilidad estandar porque $m = \sum m_i > 4 \sum \sigma_i^2/S$.

De aqui deducimos que si cada contrato cumple con la - rentabilidad estándar, el total de la cartera también lo hace. Como para la solvencia estandar $S^2 > 16 \sum_i^m \sigma_i^2$

Deducimos que si el nuevo contrato cumple la rentabilidad, puede ser incluido si S es lo suficientemente grande para permitir que se cumpla la solvencia estándar despues de su inclusión.

Por tanto si una compañia no cumple la solvencia estandar no le será permitido realizar más negocios.

La rentabilidad estandar propuesta por Bohman, según - él, podria servir como guia para el director de la compañía cuando ha de decidir el recargo de seguridad que ha de añadir a las primas con el fin de asegurar la superviciencia de la empresa a largo plazo.

I. Recargo en función del elemento sistemático de la varianza.

Ahora nos proponemos desarrollar un principio apropiado para el cálculo de primas a la luz de los recientes descubrimientos de la teoría financiera y especialmente de la teoría del equilibrio del mercado de capitales, que pueden dar lugar a considerar desde un nuevo punto de vista la obtención de un recargo adecuado. (86)

Como introducción vamos a indicar los siguientes puntos de interés:

1.- ¿Pueden ser tenidos en cuenta los ingresos de inversiones en el cálculo de primas?. Algunos aseguradores y reguladores de la actividad aseguradora tienden a no considerarlas. Otros y especialmente en ciertos ramos, las deducen por medio del calculo del valor actual esperado de los flujos de caja relevantes (siniestros y gastos).

Aqui sugeriremos que las entradas de inversión deben ser tenidas en cuenta a la hora de calcular la prima bien a través de su valor actual ó como un recargo negativo sobre los siniestros esperados.

2.- Otro problema que puede ser resuelto con el uso de la teoría financiera es el relativo a la adecuada medida del riesgo con el propósito del cálculo de la prima. Sugeriremos que las tradicionales medidas para un riesgo individual, estudiadas antes, pueden ser reemplazadas por el elemento sistemático de la varianza y que el recargo de riesgo puede ser proporcional a este elemento.

En el presente epígrafe ——————→ vamos a considerar el beneficio de el asegurador como derivado del negocio de seguro y de las entradas de inversión. El asegurador podrá en determinadas circunstancias incluso buscar una pérdida en su actividad puramente aseguradora. Daremos una explicación teórica de la posibilidad de recargo negativo.

3.- Sugeriremos, en fin, que los recargos para riesgo deberían ser determinados por el equilibrio del mercado de capitales y debe por lo tanto ser objetivo y uniforme para todos los aseguradores.

Aunque en el tema dedicado al sistema de inversiónes de la empresa lo analicemos con más detenimiento, repasemos los conceptos que a nuestro propósito necesitamos de la teoría de la cartera y del mercado de capitales.

Supongamos que una empresa de seguros compite en la busca de fondos de posibles inversores en el mercado de capitales. Los beneficios de la empresa deben por tanto compensar a los actuales y potenciales inversores de los riesgos que ellos asumen en su inversión.

La rentabilidad del asegurador viene afectada, lógicamente, por la fórmula de la prima y la relación entre el necesario retorno esperado y el nivel de riesgo puede ser la clave de la fórmula de la prima.

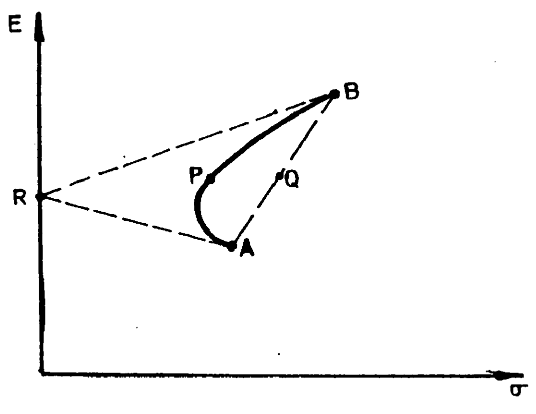
El reciente desarrollo de la teoría financiera sugiere que la exacta relación entre el retorno esperado y el riesgo debe inducir al equilibrio del mercado.

La teoría de la cartera se basa en una propiedad de la desviación típica: la desviación tipica de una combinación lineal de variables aleatorias es inferior que la suma ponderada de las desviaciones tipicas individuales.

Utilizaremos el valor esperado como medida de rentabilidad y la desviación típica como medida del riesgo.

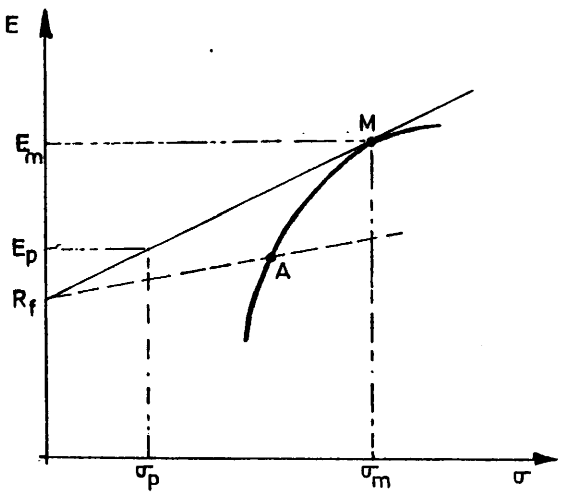
La ventaja de la diversificación radica en la posibilidad de obtener una desviación típica más baja que con una cartera no diversificada.

Si tenemos dos activos A y B, todas las carteras que podemos obtener combinando los mismos en diferentes proporciones vienen representados por la curva APB. La naturaleza de dicha curva dependerá de la correlación entre A y B: Si están perfectamente correlacionadas positivamente, no habrá ganancia en la diversificación (curva AQB); si estan perfectamente correlacionados negativamente, el inversor podría incluso encontrar una cartera con un esperado retorno positivo y desviación típica cero (R), aunque se compone de activos con riesgo.



Una vez obtenida la frontera eficiente, el siguiente problema es seleccionar la cartera óptima sobre esta frontera. La solución económica tradicional se basa en la introducción de un conjunto de curvas de indiferencia que representan la relación de cambio subjetiva entre riesgo (desviación típica) y rentabilidad (retorno esperado). La cartera óptima será obtenida encontrando el punto de tangencia de la curva de indiferencia más elevada y la frontera eficiente. Esta solución depende de la actitud subjetiva individual hacia el riesgo reflejada por las curvas de indiferencia y supone un completo conocimiento de la utilidad individual.

El CAPM (capital assets pricing model) ofrece una nueva solución que no depende de las preferencias individuales y es uniforme para todos los inversores. Su principal supuesto es la existencia de un mercado perfecto de capitales, esto es, existe una tasa de interés uniforme a la cual cada inversor puede pedir prestado o prestar alguna cantidad de dinero. La introducción de esta tasa de interés a través de un activo sin riesgo causa un gran cambio en la frontera eficiente: la combinación de activos sin riesgo R_f con activos con riesgo por ejemplo la cartera A, nos dará carteras en la linea recta R_fA. Las mejores combinaciones estarán sobre la R_fM, tangente a la frontera eficiente en M. (ver siguiente figura). La cartera óptima es seleccionada en dos etapas: a) encontrar la cartera M de activos con riesgo. b) selecionar la combinación de esta cartera con los activos sin riesgo que será la tangente de R_fM a las curvas de indiferencia.



El siguiente paso en el desarrollo del CAPM esta basado en el supuesto de que todos los inversores tienen las mismas expectativas respecto de la media, desviación típica y cowarianzas entre los activos. De esta forma todos ellos poseen la misma cartera de activos con riesgo M. Las combinaciones de esta cartera con el interés sin riesgo se sitúan en una li̲nea recta llamada linea de mercado. Su ecuación es:

$$E_p = R_f + \frac{E_m - R_f}{\sigma_m} \sigma_p$$

Según ella el reterno esperado de una cartera es igual a la tasa de interés sin riesgo más un recargo que es proporcional a la desviación típica de la cartera.

Bajo el CAMP la apropiada medida del riesgo para una - cartera de activos es la desviación tipica de la misma. Pero esto es un supuesto básico del modelo, por lo cual no puede ser usado como argumento contra otras medidas del riesgo.

Veamos, ahora, la relación riesgo-retorno para un riesgo individual.

El anterior modelo muestra que el retorno esperado de una inversión individual bajo equilibrio debe satisfacer la ecuación:

$$E_i = R_f + \frac{E_m - R_f}{\sigma_m^2} \sigma_{im}$$

donde σ_{im} representa la covarianza entre el retorno del activo i y el retorno de la cartera de mercado. Esta ecuación muestra que el retorno esperado de un activo individual es igual al del activo sin riesgo más un recargo proporcional al riesgo. Esto sugiere una nueva medida del riesgo de un active individual el riesgo "sistemático". En literatura financiera se llama coeficiente beta a la relación σ_{im}/σ_m^2.

La varianza total del retorno del activo i es dividida en dos componentes: el riesgo sistemático (representa la correlación con la cartera de mercado) y el elemento no sistemático (representa las fluctuaciones aleatorias, el ruido).

Este último elemento es excluido de la medida del riesgo porque puede ser eliminado con una adecuada diversificación de la cartera. Se supone que las fluctuaciones aleatorias de los activos estan incorrelacionadas.

Traslademos ahora estas ideas a la prima de seguro.

De acuerdo con lo anterior existiría un objetivo precio de mercado por unidad de riesgo. Esto puede sugerir que el recargo de riesgo en seguros debe ser determinado objetivamente más que a través de consideraciones subjetivas. El recargo no debería depender de la actitud del director hacia el riesgo (esto es de su función de utilidad). Más aún el modelo puede ser utilizado para encontrar los parámetros exactos del recargo de riesgo.

Como ya se ha indicado, el beneficio ha de tener dos - fuentes: el negocio de seguro y los ingresos de inversiones. El problema de fijar la prima se ha de analizar considerando las dos fuentes simultaneamante.

Supongamos que la empresa tiene m actividades de seguro (pólizas o ramos). Sean X_i las primas del contrato i. Se espera tener una pérdida de $X_i \hat{r}_i$ pts. $\hat{r}_i$ es una variable aleatoria que representa la tasa de pérdidas en ese ramo o póliza - (un valor negativo denotará beneficio). Las variables aleatorias estarán claramente afectadas por la fórmula de prima utilizada, ya que ésta determina la tasa de beneficio esperado a través del recargo.

Supongmos que tambien el asegurador posee una cartera de inversiones compuesta por n activos. La cantidad invertida en el activo i es X_i $(i = m+1, \ldots\ldots, m+n)$ y la tasa de retorno de dicho activo es una variable aleatoria $\hat{r}_i$.

El beneficio total de la firma será

$$Y = \sum_{i=m+1}^{m+n} X_i \hat{r}_i - \sum_{i=1}^{m} X_i \hat{r}_i$$

Si K son los capitales libres. Podemos expresar la tasa de retorno sobre el mismo por $\hat{r}_y$, siendo:

$$\text{(I)} \qquad \hat{r}_y = \frac{Y}{K} = \sum_{i=m+1}^{m+n} \frac{X_i}{K} \hat{r}_i - \sum_{i=1}^{m} \frac{X_i}{K} r_i$$

Haciendo $x_i = X_i/K$ y añadiendo un sibindice j que indique la compañía j tendremos:

$$\text{(II)} \qquad \hat{r}_{yj} = \sum_{i=m+1}^{m+n} x_{ij} \hat{r}_i - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \hat{r}_i$$

$\hat{r}_i$ se supone igual para todas las compañías.

Supongamos ahora que la tasa $\hat{r}_{yj}$ es igual a la tasa de retorno de mercado de las acciones de la empresa. Entonces - podemos escribir

$$\text{(III)} \qquad E(\hat{r}_{yj}) = R_f + (E_m - R_f)\, \beta_j$$

tomando el valor esperado de (II) y sustituyendo en (III)

$$\text{(IV)} \quad E(\hat{r}_{yj}) = \sum_{i=m+1}^{m+n} x_{ij}\, E(\hat{r}_i) - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\, E(\hat{r}_i) = $$

$$= R_f + (E_m - R_f)\, \beta_j$$

Es fácil demostrar que el riesgo sistemático de una empresa es igual a la media ponderada del riesgo sistemático de cada una de las actividades de seguro e inversión:

$$\text{(V)} \quad \beta_j = \sum_{i=m+1}^{m+n} x_{ij}\, \beta_i - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \cdot \beta_i$$

que sustituido en (IV) y eliminando j para simplificar las notaciones nos dá

$$\text{(VI)} \qquad \sum_{i=m+1}^{m+n} x_i\, E(\hat{r}_i) - \sum_{i=1}^{m} x_i\, E(\hat{r}_i) = R_f +$$

$$+ \left(\sum_{i=m+1}^{m+n} x_i \beta_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \beta_i \right)(E_m - R_f)$$

Ya que las actividades de inversión obedecen a las mismas relaciones de equilibrio del mercado de capitales, el retorno esperado de cada inversión satisface:

$$(VII)\qquad E(\hat{r}_i) = R_f + (E_m - R_f)\beta_i \qquad (i=m+1,\ldots\ldots,m+n)$$

y el retorno para el total de la cartera de inversiones:

$$(VIII)\qquad \sum_{i=m+1}^{m+n} x_i E(\hat{r}_i) = \sum_{i=m+1}^{m+n} R_f x_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} x_i \beta_i (E_m - R_f)$$

restando (VIII) y (VI) obtenemos el beneficio esperado del negocio de seguro que mantiene el equilibrio del mercado de capitales

$$(IX)\qquad -\sum_{i=1}^{m} x_i E(\hat{r}_i) = R_f\Big(1 - \sum_{i=m+1}^{m+n} x_i\Big) - \sum_{i=1}^{m} x_i \beta_i (E_m - R_f)$$

Suponiendo que cada peseta de primas en la actividad i genera g_i de inversiones, la relación contable activo igual a pasivo más neto, puede ser expresada:

$$(X)\qquad \sum_{i=m+1}^{m+n} x_i = 1 + \sum_{i=1}^{m} x_i g_i$$

con lo cual tendremos:

$$(XI)\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i E(\hat{r}_i) = R_f \sum_{i=1}^{m} x_i g_i + \sum_{i=1}^{m} x_i \beta_i (E_m - R_f)$$

Dadas β_i, E_m, R_f y los x_i esta ecuación es insuficiente para determinar un simple conjunto de $E(\hat{r}_i)$ i= 1,2,...,m. Sin embargo una solución de gran interés, ya que es parecida a las del modelo es:

$$(XII)\qquad E(\hat{r}_i) = R_f g_i + (E_m - R_f)\beta_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

esto indica que la empresa estaría dispuesta a perder en la actividad de seguro i una cantidad de g_i veces la tasa de los activos sin riesgo más un recargo proporcional a su riesgo sistemático.

Existe un recargo negativo $R_f g_i$ ($E(\hat{r}_i)$ es la pérdida esperada) que representa las entradas de inversiones y es indirectamente generado a través de la actividad de seguro i.

Por ejemplo, si la actividad genera una peseta de inversión por cada peseta de primas, pero crea riesgo no sistemático, la empresa estaría dispuesta a suscribir esta actividad, para una pérdida esperada equivalente a la tasa de interés de los activos sin riesgo. Si la actividad genera mas de una peseta, la empresa estará dispuesta a perder incluso más.

La pérdida esperada en seguro según la ecuación (XII) - es tambien una función del riesgo de contrato de seguro concreto. Un beta positivo justifica una pérdida adiccional en - seguros.

Por tanto dicha ecuación puede servir como guia para el cálculo del recargo de riesgo.

El recargo de riesgo, como ya indicamos, es proporcional al elemento sistemático del riesgo (beta) que refleja la contribución de una actividad a la cartera de mercado. Esto significa que la pérdida (beneficio) de seguro, puede fluctuar - grandemente alrededor de su valor esperado (por una varianza grande), pero no obstante, puede ser considerada con poco riesgo por los accionistas. El recargo de riesgo es proporcional a beta de acuerdo con un precio objetivo por unidad de riesgo. El factor precio viene dado por la diferencia entre el retorno esperado de la cartera de mercado y la tasa de interes de los activos sin riesgo. Este precio es uniforme para todos los inversores.

Según esto, la creencia tradicional de que una pequeña compañía es "castigada" por tener qué aplicar un alto recargo habría de ser reexaminada.

Podemos, para terminar formular las siguientes observaciones:

-- El modelo se basa en el supuesto de que los aseguradores e inversores conocen los correctos parámetros de las distribuciones relevantes. No hemos discutido el elemento riesgo de los errores estadisticos e incorrectas estimaciones de los parámetros. Tal situación justificaría un recargo especial.

-- Se supone que todas las distribuciones estan caracterizadas por la media y la varianza.

-- El nivel de agregación de la medida del riesgo. El término"actividad de seguro" puede ser considerado como una - póliza individual, o en un sentido más amplio, como un ramo de seguro. con altos nivles de agregación el riesgo sistemático se aproxima a la desviación típica (ya que el ruido es eliminado a través de la diversificación). Entonces con altos nivales de agregación la diferencia entre el recargo beta y un recargo tradicional, proporcional a la desviación típica o varianza,es pequeña.

-- No se considera el problema de la inflación, que afecta al modelo en su conjunto.

II.3.3.1.2 Cálculo del recargo de seguridad con criterio de estabilidad.

Consideraremos en este caso el sistema de estabilidad de la compañía en su conjunto. Nuestro objetivo será la consecución de que la probabilidad de ruina de la compañía no sobrepase un determinado nivel.

Suponiendo dados los restantes elementos del sistema de estabilidad: reaseguro y reservas de estabilidad; la fijación de la deseada probabilidad de ruina, dejará como única incognita el recargo de seguridad(λ).

Los elementos vendrán relacionados por la Teoría del Riesgo Colectivo.

Distinguiremos dos casos:

1.- Calculo para la cartera total:

Sea la prima recargada:

$$P' = (1 + \lambda)\, P$$

como se expresa tradicionalmente en la Teoría del Riesgo Colectivo. Donde

$$P = E(x) = \int_0^\infty x \, dF(x,t) = t.c_1$$

el recargo de seguridad lo podemos calcular con arreglo a uno de los siguientes criterios:

-- Criterio F.

Siendo ε la probabilidad de ruina, el valor de λ se obtendrá de:

$$F((1+\lambda)P+S,\ t)) = 1-\varepsilon$$

Se trata de un criterio a corto plazo, puesto que está asociado a la distribución de un sólo ejercicio.

-- Criterio Ψ

Dado R, obtenido de:

$$\varepsilon \simeq e^{-R.S}$$

el valor del recargo de seguridad se obtiene con la condición.

$$E(e^{-R((1+\lambda)t.c_1 - x)}) = 1$$

desarrollando

$$e^{R(1+\lambda)t.c_1} = E(e^{Rx}) = \int_0^\infty e^{Rx}\, dF(x,t) = \varphi_n(V(R))$$

que según sea la distribución del número de siniestros de - Poisson o binomial negativa será:

$$\varphi_n(V(R)) = \begin{cases} e^{t(V(R)-1)} \\ \\ (1-\frac{t}{h}(V(R)-1))^{-h} \end{cases}$$

de donde

$$V(R) = \int_0^\infty e^{Rx} dV(x) \quad \begin{cases} 1+(1+\lambda)R.c_1 \\ \\ 1+\dfrac{1-e^{-(1+\lambda)\ R.c_1.t/h}}{t/h} \end{cases}$$

respectivamente.

como soluciones aproximadas podemos dar, para cada una de las distribuciones:

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{c_2}{2.S.c_1} (-\ln \varepsilon) \\ \\ \dfrac{1}{2S} (1 + \sigma^2 + \dfrac{t}{n}) (-\ln \varepsilon) \end{cases}$$

Los resultados anteriores tienen validez para el total de una cartera, o bien para una cartera parcial limitada a - un ramo.

Pero tienendo en cuenta que en la práctica se dispone de información de las carteras parciales, se presenta el pro blema de fijar las distribución de la totalidad a partir de las correspondientes distribuciones de las carteras parciales. Para ello es preciso tener en cuenta:

a) Que las carteras parciales sean estocaśticamente in dependientes. En tal caso se tiene:

Cartera parcial	Distribución
C_1	$F_1(x,t) = \sum_n \dfrac{e^{-t_1} t_1^n}{n!} V_1^n(x)$
....	....
C_m	$F_m(x,t) = \sum_n \dfrac{e^{-t_m} t_m^n}{m!} V_m^n(x)$

la solución para la cartera total será:

$$F(x,t) = \sum_n \frac{e^{-t} t^n}{n!} V^{n(*)}(x)$$

donde:

$$t = t_1 + t_2 + \dots\dots\dots\dots + t_m$$

$$V(x) = \frac{t_1 V_1(x) + \dots\dots\dots\dots + t_m V_m(x)}{t_1 + \dots\dots\dots\dots + t_m}$$

siendo en este caso la distribución del número de siniestros es de Poisson.

La demostración es muy sencilla. Sean:

$$\varphi_1 = e^{t_1} \, (V_1 - 1)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_m = e^{t_m} \, (V_m - 1)$$

entonces para la cartera total

$$\varphi = e^{\sum_j t_j (V_j - 1)} = e^{t\left(\frac{\sum_j t_j V_j}{t} - 1\right)} = e^{t(\bar{V} - 1)}$$

donde

$$\bar{V} = \frac{\sum_j t_j \int_0^\infty e^{iux} \, dV_j(x)}{\sum_j t_j} = \int_0^\infty e^{iux} \, d\left(\frac{\sum_j t_j V_j(x)}{t_j}\right) =$$

$$= \int_0^\infty e^{iux} \, d\, V(x).$$

b) Que se trate de carteras parciales dependientes; En este caso el problema se complica a efectos prácticos.

Una solución es la que da Ammeter mediante la cual, este caso, queda comprendido en el anterior.

Parte de dos carteras C_a y C_b, las cuales subdivide a su vez en dos subcarteras ficticias:

$$C_a \begin{cases} \emptyset\ (a) \\ \bar{\emptyset}\ (a) \end{cases} \quad y \quad C_b \begin{cases} \emptyset\ (b) \\ \bar{\emptyset}\ (b) \end{cases}$$

de esta cuatro carteras parciales solamente hay dependencia en las subcarteras ϕ (a) y ϕ (b). Con ello se llega a tres carteras parciales independientes con arreglo a los siguientes elementos de cálculo:

Carteras	C_1	C_2	C_3
Nº de siniestros.....	$\phi(a)t_a$	$\bar{\phi}(b)t_b$	$\phi(a)t_a + -\phi(b)t_b$
Coefic.de flutuación.	h_1	h_2	h_3

donde los coeficientes h satisfacen:

$$t_a + \frac{t_a^2}{h_a} = t_a + \frac{(\bar{\phi}(a)t_a)^2}{h_1} + \frac{(\phi(a)t_a)^2}{h_3}$$

$$t_b + \frac{t_b^2}{h_b} = t_b + \frac{(\phi(b)t_b)^2}{h_2} + \frac{(\phi(b)t_b)^2}{h_3}$$

$$t_{a-b} + \frac{t_{a-b}^2}{h_{a-b}} = t_{a-b} + \frac{(\bar{\phi}(a)t_a)^2}{h_1} + \frac{(\bar{\phi}(b)t_b)^2}{h_2} + \frac{(\phi(a)t_a - \phi(b)t_b)^2}{h_3}$$

2.- Tarificación según carteras parciales

Por razones prácticas y de competencia se impone una tarificación de acuerdo con las carteras parciales.

Consideremos las siguentes carteras parciales independientes (cuando no lo sean se pueden hacer las transformaciones de Ammeter):

Cartera	S	t	c	V(x)	V(u)	λ	h	Ganan.
C_1	S_1	t_1	c_1	V_1	v_1	λ_1	h_1	Y_1
...	.....	...	..	....	.....	.....	....	...
C_m	S_m	t_m	c_m	V_m	v_m	λ_m	h_m	Y_m

Dadas:

-- las reservas de estabilidad total:

$$S = \sum_{j} S_j$$

-- la probabilidad de ruina

a partir de la relación $\varepsilon \geq e^{-RS}$ obtenemos el coeficiente de compensación R.

y siendo la ganancia total $Y = \sum_{r} Y_r$

con función característica

$$\varphi = \prod_{1}^{m} \varphi_r = \prod_{1}^{m} E\left(e^{iu((1+\lambda_r).t_r.c_r - X_r)}\right)$$

el coeficiente R satisface:

$$1 = \prod_{1}^{m} E(e^{-RY_r}) = \prod_{1}^{m} E\left(e^{-R((1+\lambda_r)t_r c_r - X_r)}\right) =$$

$$= \prod_{1}^{m} e^{-R(1+\lambda_r)t_r c_r} . \varphi_n(v_r(R))$$

con los cual los valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots, \lambda_m$ se calculan de:

$$\prod_{1}^{m} e^{-R(1+\lambda_r)t_r c_r} . \varphi_n(v_r(R)) = 1$$

$$\prod_{1}^{m} e^{(1+\lambda_r)P_r R} = \prod_{1}^{m} \varphi_n(v_r(R))$$

<u>Problemas técnicos y económicos</u>

a) Tecnicos. Criterios de tarificación

a.1) Tarificación natural.

Estamos ante la misma cuando los recargos de seguridad se calculan separadamente para cada cartera, es decir:

$$e^{-R(1+\lambda_j)t_j c_j} \cdot \varphi_n(v_j(R)) = 1$$

con

$$R = -(\ln \varepsilon)/S_j$$

Tenemos que:

-- En esta tarificación no desempeña ningún papel el resto de las carteras.

-- En dicha tarificación se consigue la estabilidad con la máxima equidad. En esta idwa incide Berger en su ponencia ya citada al 19 Congreso Internacional de Actuarios.

a.2) Otros criterios.

En base a satisfacer el principio de estabilidad se puede llegar a valores de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_m$, que satisfaciendo la condición anterior supongan otros tantos criterios de tarificación.

b) Económicos

La anterior indeterminación técnica se puede resolver con un criterio económico:

Dada la función de demanda $n(\lambda_i)$ el problema será maximizar la función:

$$Z = \sum \lambda_i \, n(\lambda_i)$$

con

$$\prod_{1}^{m} e^{-R(1+\lambda_r)t_r c_r} \cdot \varphi_n(v_r(R)) = 1$$

o tambien

$$R \sum_r (1+\lambda_r) \cdot t_r c_r = \sum_r \ln \varphi_n(v_r(R))$$

Aplicando un criterio basado en un orden de preferencia, como ya se indicó anteriormente, buscaremos la elección de la mejor distribución del beneficio, dada la función de utilidad del empresario u(x).

Estaremos ante un problema de programación cuya solución será la optima.

Siendo F_i la distribución asociada a cada grupo

$$F^{m)} = F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots\ldots \cdot F_m$$

trataremos de maximizar:

$$\int_0^{\infty} u\left(S + \sum_i^m n(\lambda_i) \ (1 + \lambda_i) P_i - X\right) \, d\, F^{m)}(x)$$

con

$$\prod_1^m e^{-R(1 + \lambda_i) t_i c_i} \cdot \varphi_n(v_i(R)) = 1$$

II.3.4. LAS RESERVAS DE ESTABILIDAD

La tercer componente del subsistema de estabilidad son las llamadas Reservas de Solvencia, estabilidad, fluctuación etc.

Resumiendo lo indicado en el estudio del recargo de - seguridad, éste tiene una doble función: una parte del mismo servirá para absorber las fluctuaciones aleatorias de la siniestralidad anual que excedan la esperada; el resto nutrirá la reserva de solvencia.

Si en un período la primera parte del recargo de seguridad no es utilizada en su totalidad para absorber las - fluctuaciones aleatorias de la siniestralidad del mismo, el resto será el beneficio técnico del período. Se dotarán las reservas de solvencia en cantidad igual a la segunda de las partes que componen el recargo.

Si por el contrario, la siniestralidad es tal que la cantidad destinada a enjugar la misma es insuficiente, una vez consumida en su totalidad, habrán de ser utilizadas las reservas de solvencia existentes para hacer frente a la misma.

Cuando las reservas de solvencia se agoten diremos - que la compañía se encuentra arruinada (más adelante concretaremos esta afirmación).

Al generalizar la Teoría del Riesgo (planteamiento - del problema de los dividendos); las reservas de solvencia poseerán, junto con la función arriba indicada el papel de estabilizador de los dividendos repartidos.

A parte de la función primordial de las reservas que estamos estudiando, podemos destacar los siguiestes rasgos característicos de las mismas:

1.- Las reservas de solvencia junto con el volumen anual de primas, la función de distribución de la siniestralidad total de la cartera y el coeficiente de oscilación - que traduce la heterogeneidad de los riesgos de la cartera, constituyen la dimensión técnica de la empresa de seguros.

2.- Las reservas de solvencia son verdaderas reservas técnicas de la entidad aseguradora y como tal han de ser tratadas.

3.- Suponen un instrumento fundamental de competencia; la posesión de unas reservas de solvencia considerables, - permiten, manteniendo la misma probabilidad de ruina, disminuir el racargo de seguridad, lo que supone la disminución del precio del servicio prestado y por tanto la posibilidad, en función de las condiciones del mercado, de un incremento en el volumen de primas.

Por otra parte nos posibilita un incrémento en el pleno de propia retención, con el consiguiente incremento en el beneficio esperado.

4.- La reserva de solvencia es una variable de decisión a largo plazo, lo que se pondrá de manifiesto más adelante.

5.- La dotación de las correspondientes reservas de solvencia ha de preceder a la definición del beneficio. Si las normas reguladoras de la actividad aseguradora no consideran dicho planteamiento, las consecuencias fiscales serán de importancia para el asegurador. Nos proponemos realizar un estudio de este punto en el siguiente epígrafe.

II.3.4.1. Beneficio y solvencia. Problemática fiscal

Uno de los caracteres de la empresa aseguradora es la inversión de su proceso productivo con respecto al de la empresa industrial; primero recibe los ingresos, primas, pagando posteriormente los siniestros. Por tanto, la financiación es previa a la inversión de los recursos, resultando condicionada la masa activa de las inversiones a la masa pasiva de los recursos ajenos, cuyo volumen y estabilidad pasa a ocupar u-n primer plano en los problemas de solvencia.

Por tanto podemos concluir que en la empresa aseguradora el beneficio ha de estar condicionado a la solvencia de la misma.

Ahora bien, hemos de concebir el beneficio como un proceso a largo plazo. Este beneficio a largo plaso ha de obtenerse periodificando el ingreso. Esto es asi, porque para matener la estabilidad de la masa pasiva, el precio del servicio, la prima, lleva una componente para cubrir el riesgo de la empresa, que es preciso detraer (dotando la reserva de solvencia) antes de definir el beneficio imputable al ejercicio que se cierra. Hay que mantener el grado de solvencia -

prefijado y después obtener el beneficio del ejercicio.

Lo anterior nos lleva al concepto de peri-odificación técnica del beneficio, que va más allá de la simple imputación económica de ingresos y gastos al ejercicio. Se trata de mantner la solvencia dinámica de la empresa en relación con su dimensión y composición de las masas activas y pasivas como condición previa a la fijación del beneficio atribuible al ejercicio correspondiente.

Sin embargo, la normativa fiscal interpreta la solvencia apoyada en el beneficio y no a la inversa como hemos visto.

Si un empresario persigue la obtención de un beneficio a largo plazo es lógico que el impuesto siga este beneficio y no al de un ejercicio aislado. En la empresa aseguradora se produce una necesaria compensación de los resultados a largo plazo y el impuesto debe gravar por tanto el beneficio medio.

El instrumento técnico que consigue esta compensación son las reservas de solvencia. Estas han de dotarse antes de la definición del beneficio técnico del ejercicio, estando por lo tanto libres de impuestos, p-or lo menos hasta que alcancen un determinado nivel, a partir del cual dejarían de tener la consideración de reserva técnica.

En nuestra legislación no se encuentran contenidos los principios establecidos anteri-ormente, solo encontramos el establecimiento de las reservas de estabilización en el seguro del automóvil, con un trato fiscal no adecuado.

II.3.4.2. Cálculo de las reservas del solvencia.

En base a la Teoría del Riesgo Colectivo, que estamos utilizando para el análisis del subsistema de estabilidad - tendremos:

a) Criterio F, de la distribución del daño total para un periodo fijo.

Dados:

- λ recargo de seguridad
- P volumen de primas (puras)
- ε probabilidad de ruina

Conocida la distribución del daño total para un periodo fijo de tiempo podemos plantear la probabilidad de que la siniestralidad del periodo no supere la suma de las primas recargadas y las reservas de solvencia

$$Pr(\xi < S + (1 + \lambda)P) = 1 - \varepsilon$$

o lo que es lo mismo

$$1 - Pr(\xi < S + (1 + \lambda)P) = \varepsilon \quad ;$$

$$1 - F(S + (1 + \lambda)P) = \varepsilon$$

siendo F la distribución del daño total, de la que podemos - considerar cualquiera de sus aproximaciones.

Asi para un periodo t, y suponiendo la aproximación normal, para una probabilidad de ruina ε necesitaremos unas reservas del solvencia

$$S = y_{\varepsilon}\sqrt{t.c_2} - \lambda t.c_1$$

Para la aproximación NP tendremos

$$S = (y + \frac{\gamma_1}{6}(y_\varepsilon^2 - 1))\sqrt{t.c_2} - \lambda t.c_1$$

donde y_ε viene dado en las tablas de la $N(0,1)$, γ_1 es el coeficiente de asimétría

El principal problema, desde el punto de vista del asegurador, que plantea este criterio, es que la distribución del daño total es conocida para un período fijo de tiempo, siendo S una variable de decisión a largo plazo que no puede ser variada a corto plazo.

La introducción del reaseguro no plantearia especiales problemas, habriamos de considerar su influencia en las distribuciones básicas simplemente.

b) Criterio ψ de la función de ruina.

Como ya demostramos al realizar su estudio, la probabilidad de ruina para un periodo infinito de tiempo viene dada por

$$\varepsilon \leq e^{-RS}$$

donde R se obtenía resolviendo la ecuación

$$E(e^{-R\eta}) = 1$$

siendo la ganancia, $\eta = (1 + \lambda)P - \xi$

Un valor aproximado de R lo hallábamos en función de la distribución del número de siniestros. Esto es si:

1.- La distribución del número de siniestros es de Poisson, obteníamos

$$R \simeq \frac{2\lambda c_1}{c_2}$$

que sustituido en

$$S = (1/R)(-\ln \varepsilon)$$

nos da un valor de S, para una probabilidad de ruina dada ε y conocidos el recargo de seguridad, primas y reaseguro (si deseamos introducirlo):

$$S = (c_2/2\lambda c_1)(-\ln \varepsilon)$$

2.- La distribución del número de siniestros es binomial negativa, tenemos:

$$R \simeq 2\lambda/(1 + \sigma^2 + t/h)$$

donde $\sigma^2 = c_2 - c_1^2$ habiendo convenido $c_1=1$.

lo que nos daba unas reservas de solvencia

$$S \simeq \frac{1}{2\lambda}(1 + \sigma^2 + \frac{t}{h})(-\ln \varepsilon) \qquad (i)$$

las cuales para una probabilidad de ruina prefijada:

-- han de incrementarse si aumentan t y/o σ^2.

-- necesitaremos un menor volumen de S si se incrementan el recargo de seguridad λ, y/o el coeficiente de heterogeneidad h.

Podemos escribir (i) en la siguiente forma:

$$S = a(\lambda,h).t + b(\lambda,\sigma^2)$$

que multiplicada por c_1 (coste medio de un siniestro), nos - da:

$$S = a(\lambda,h).t + b(\lambda,\sigma^2).c_1$$

Si consideramos las primas comerciales P'' en lugar de las primad puras P llegaríamos a

$$S = a'(\lambda, h)P'' + b(\lambda,\sigma^2).c_1$$

de donde concluimos que las reservas de solvencia se componen de un sumando que no depende del volumen de primas y otro que no depende del mismo.

La introducción del reaseguro nos llevaría a la siguiente relación

$$S = a'(\lambda,h)P''(M) + b(\lambda, \sigma^2(M)).c_1(M)$$

donde (M) indica magnitudes netas de reaseguro.

II.3.4.3. La reserva de estabilización del Seguro Voluntario y Obligatorio de Automóviles.

La primera, y única hasta el momento, disposición legal referente al tema de las reservas de estabilización es la relativa a los Seguros Voluntario y Obligatorio de Automóviles. Regulación recogida en las Ordenes ministeriales - de 26 y 13 de mayo de 1.965 respectivamente y la Circular 2/66.

Como indica García Esteban (87): "si examinamos el contenido de estas normas legales veremos que no siguen totalmente la linea señalada anteriormente, por la sencilla razón de que en las bases técnicas autorizadas para estos ramos no figura de forma explícita el recargo o margen de seguridad. Entonces la reserva de estabilización se constituye destinando a la misma un porcentaje determinado sobre el resultado - técnico positivo del ramo, a cuyo efecto se concretan las -- partidas que han de integrar esta cuenta de explotación.

El hecho de constituirse esta reserva con cargo a beneficios es lo que ha motivado el correspon-diente problema -- fiscal a las empresas aseguradoras, cuando el origen de estas reservas debe ser puramente técnico".

Para el Seguro Obligatorio la citada orden en su artículo octavo establece que la constitución de la reserva ha - de realizarse destinando a la misma, como mínimo, un 40% de - los resultados positivos del seguro directo, hasta que alcance una cuantía del 30% del promedio de primas comerciales de los trés últimas ejercicios.

Por otra parte la corespondiente disposición relativa al Seguro Voluntario establece en el 25% el porcentaje de los resultados técnicos positivos del seguro directo, que como mínimo se destinarán a la reserva de estabilización hasta que ésta alcance el 30% del promedio de primas comerciales de los últimos tres años.

La citada Circular nos concreta la forma de determinación del benefico técnico del Segufo Obligatorio. Las partidas son las siguientes:

DEBE	HABER
R.riesgos en curso ejercicio anterior (a prima de riesgo)	Siniestros pagados ejercicio
R.siniestros pendientes ej.a.	Gastos gestión interna (aplicación a P'' del coeficiente de la nota técnica aprobada)
Primas comerciales emitidas netas de anulaciones	G. gestión externa (mismo método que anteriores)
Producto fondos invertidos del ramo	R.riesgos en curso este ejercicio a prima de riesgo.
	R.siniestros pendientes este ejercicio.
	Amortización inversiones ramo

La diferencia de las sumas del debe y haber nos determinará el beneficio técnico cuyo 40% como mínimo, en las condiciones indicadas se dotará como reserva de estabilización del ejercicio.

Si el resultado técnico del seguro directo fuera negativo, habrá de ser informada la Dirección General de Seguros según dispone la Orden Ministerial de 13 de mayo de 1.965. - En este caso ha de conjugarse el resultado ténico negativo - del seguro directo, con la incidencia que puedan tener las - operaciones del reaseguro aceptado y cedido, para lo cual ha brán de formarse cuentas técnicas del reaseguro aceptado y - cedido, con las partidas anteriormente señaladas, excluyendo naturalemente las comisiones y participación de gastos del - reaseguro.

La suma de los tres resultados nos dará el correspon - diente al negocio técnico del ramo, que si fuera negativo po drá ser compensada con la reserva de estabilización hasta el importe de la misma.

Podemos destacar tres características de la presente - regulación de las reservas de estabilización para el Seguro Voluntario y Obligatorio de Automóviles: el recargo de seguridad, que ha de servir para la dotación de las reservas, no aparece en forma explícita en las bases técnicas; no resuelve el problema fiscal planteado anteriormente y los porcentajes que se destinan a engrsar la misma, asi como su cuantía no tienen un claro fundamento técnico.

II.344. Un ejemplo de cálculo técnico de la reserva de sdvencia: Finlandia.

El modelo de reservas de solvencia que vamos a estudiar tine dos características que lo diferencian favorablemente del estudiado para el Seguro de Automóviles de nuestro pais: posee un fundamento técnico-actuarial al basarse en la Teoría del - Riesgo; por otra parte el trato fiscal a las reservas de solvencia se acerca al indicado anteriormente como apropiado.

En la Ley Reguladora de las Entidades Aseguradoras de Finlandia del año 1953, establece un límite superior y otro - inferior para dichas reservas. De acuerdo con la siniestralidad anual cada compañía de seguros puede mantener unas reservas comprendidas en los límites senalados. Cuando la siniestralidad es favorable, el beneficio es llevado a la reserva "libre de impuestos", siempre que no sea superado el límite superior. Por otra parte cuando la siniestralidad es alta, las pérdidas podrán ser cubiertas a costa de las reservas cuidando que estan no caigan por debajo del límite inferior. La flexibilidad de movimientos de las reservas entre ambos límites no es potestativo de la dirección de la compañía, es la autoridad supervisora la que regula las transferencias como más adelante veremos.

El límite superior representa en alguna manera los deseos de la compañía, garantiza la continuación de las operaciones - durante un período de cinco años.

Por otra parte el límite inferior representa los deseos de la autoridad supervisora, esto garantiza que la compañía podrá hacer frente a las obligaciones de los contratos co - rrientes.

Examinemos el método de cálculo de la reserva.

Vamos a utilizar los siguientes simbolos:

-- k: clase de seguro

-- ΔT_k: transferencia a la reserva en la clase de seguro k.

-- T_k^0: reserva de la clase k al final del período anterior.

-- T_k^1: reserva de la clase k al final del año actual.

-- f_k: ratio medio de pérdida durante los últimos N_k años ($N_k \leq 5$).

-- a_k: constante básica ($0 \leq a_k \leq 0,15$)

-- B_k: ingresos por primas (netos de retención) en la - clase k.

-- X_k: siniestros pagados (netos de retención) en la clase de seguro k.

-- M: maxima retención neta de la compañía.

-- Y(v): Distribución de Poisson modificada.

-- L: reserve para siniestros desconocidos.

-- P: ingresos de primas (netos de retención).

-- U: capital operacional.

-- n_k: número esperado de siniestros en la clase k.

-- q_k: coeficiente de fluctuación de la clase k.

-- r: número de siniestrso ocurridos.

-- $F_k(x)$: función de distribución de la siniestralidad total anual de la clase k (sin tener en cuenta reaseguro cedido tipo stop-loss)

-- $V_k(x)$: función de distribución de la cuantía de un siniestro.

-- $V_k^r(x)$: convolución r-sima de $V_k(x)$.

-- c_{ki}: momento i de $V_k(x)$.

-- $E(x)$: valor esperado de $F_k(x)$.

-- $\sigma^2(x)$: varianza de $F_k(x)$.

-- $\mu(x)$: momento de tercer orden respecto de la media de $F_k(x)$.

La transferencia a la reserva se realizará en la siguiente forma:

- Para cada clase de seguro:

$$\Delta T_k = 0{,}05\ T_k^o + 1{,}0247\ (c_k B_k - X_k)$$

$$T_k^1 = T_k^o + \Delta T_k$$

$$c_k = \bar{f}_k + a_k$$

- Para la cartera total:

$$\Delta T = \sum_k T_k$$

$$T^1 = T^o + \Delta T$$

Si $T^1 > T_{máx.}$ se transfiere $T_{máx} - T^o$ con lo que $T^1 = T_{max}$

Si $T^1 < T_{mín.} \leq T^o$ se transfiere $T_{mín} - T^o$; $T^1 = T\ mín.$

Si $T^1 < T_{mín} > T^o$ y $\Delta T > 0$, se transfiere ΔT.

Si $T^1 < T_{máx} > T^0$ y $\Delta T \leq 0$ no se realiza transferencia.

Podemos verificar que las reservas se encuentran entre los límites superior e inferior, sin necesidad de calcular éstos, simplemente comprobando que se cumple:

-Para el límite inferior

$$T \geq \text{Máx}(0;\ 0{,}9759(MY(v) - P) - L - U)$$

donde

$$v = \frac{1}{M} \sum_k (1 + q_k) \cdot P_k$$

- Para el límite superior

$$T \leq \text{Máx}(2M;\ 5(\sum q_k P_k + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum (1 + q_k) \cdot P_k))$$

Por otra parte, el valor concreto de los límites superior e inferior, puede ser calculado en la siguiente forma:

- En cada clase de seguro la función de distribución de la siniestralidad total se supone sigue la distribución de Poisson generalizada, esto es:

$$F_k = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-n_k} n_k^r}{r!} \cdot V_k^r(x)$$

$$X_\varepsilon = E(x) + \sigma(x)(y_\varepsilon + \frac{1}{6} \frac{\mu_3(x)}{\sigma^3(x)}(y^2 - 1))$$

fórmula que se puede usar para $\frac{\mu_3(x)}{\sigma^3(x)} < 2$

donde

$$E(x) = \sum_k n_k \cdot c_{k1} = \sum_k P_k = \sum_k (1 - q_k) \cdot P_k$$

$$\sigma^2(x) = \sum_k n_k \cdot c_{k2}$$

$$\mu_3(x) = \sum_k n_k \cdot c_{k3}$$

$$c_{kt} = \int_0^{\infty} x^t \, dV_k(x).$$

- El valor inferior

$$P(1,05(T_{mín} + L + U) + \sqrt{1,05}(P - X) \geq 0) = 0,99$$

con la limitación

$$T_{mín} \geq \text{Máx}\ (0;\ M - L - U)$$

que obtenemos finalmente:

$$T_{mín} = 0,976 \sum_k q_k P_k + 2,27\sigma + 0,717\frac{\mu_3}{\sigma^2} - L - U$$

- El valor superior

$$P(1,05^r\, T_{máx} + \sum_{t=1}^{r} 1,05^{r-t-\frac{1}{2}}(P^t - X^t) \geq 0; 1\leq r\leq 5) = 0,99$$

con la limitación

$$T_{máx} \geq 2M$$

donde la variable $x_r = \sum_{t=1}^{r} 1,05^{r-t}.x^t$, se supone sigue la distribución de Poisson generalizada, haciendo $\varepsilon = 0,01$, obtenmos la fórmula para el valor del límite superior:

$$T_{máx} = 4,436 \sum_k q_k.P_k - 4,626\sigma - 0,658\frac{\mu_3}{\sigma^2}$$

II.3.5. El margen de solvencia.

Como indica el profesor Prieto Perez:"Uno de los problemas fundamentales con el que se enfrentarán los aseguradores en el futuro es la constituición y financiación del margen de solvencia. Es evidente que el estado debe exigir a las entidades aseguradoras, un cierto grado de solvencia y verificar que éstas lo cumplen, y ello, no sólo en defensa de los asegurados y de los posibles perjudicados a quienes protegen los seguros de responsabilidad cívil, sino tambien de los terceros que se relacionan con la misma....

El margen de solvencia representa la consagración jurídica del papel esencial que el capital juega en la empresa aseguradora....

La legislación de los distintos paises que tiene implantado el margen de solvencia, exige que las empresas de seguros cuenten, además de con las reservas técnicas suficientes para hacer frente a los compromisos contraidos, de una reserva complementaria, llamada margen de solvencia, representada por el patrimonio libre, para hacer frente a los riesgos de explotación....

Por otra parte, parece conveniente, a fin de asegurar - que las empresas dispongan desde el momento de su constitución de una solvencia adecuada, exigirles un fondo de garantía mínimo . Naturalmente el margen de solvencia nunca podrá ser inferior a él"(68).

La función del margen de solvencia no ha de ser exclusi-

vamente, las perdidas debidas a las desviaciones desfavorables
absorber
de la siniestraiidad; podemos señalar que la función del mismo será:

-- Absorber cualquier exceso de los costes del seguro sobre las primas.

-- Absorber cualquier infravaloración de las reservas técnicas.

-- Absorber cualquier depreciación de los activos (89).

Es evidente que la capacidad de hacer frente a las obligaciones que tiene una entidad aseguradora puede verse afectada tanto por un incremento excesivo de las mismas (siniestralidad elevada, etc.), como por una disminución de los activos que han de cumplir con ellas.

Es díficil plantear un margen de solvencia técnicamente construido que aborde los riesgos indicados anteriormente. -- Por tanto, la regulación del mismo, cuando se ha intentado adoptar un criterio técnico, se ha basado en la Teoría del Riesgo, que se ocupa del negocio de seguro en sentido estricto.

"La Teoría del Riesgo hace posible especificar, dentro de una escála de probabilidades razonablemente reducida $\mathcal{E}$, que un asegurador dado, habiendo especificado sus características, se convertirá en insolvente dentro de un tiempo t, si todas las características permanecen iguales. Este riesgo de ruina establece por tanto un punto de arranque para un proceso de análisis que permita el exámen continuo de las perspectivas del asegurador para una viabilidad continuada a lo largo del período considerado crucial.

La probabilidad ϵ, se basa en la probabilidad combinada de que el superavit (incluyendo el capital) del asegurador sea sobrepasado por el volumen excesivo , no anticipado, de las pérdidas en el negocio normal, las pérdidas en la previsión de las reservas, y las pérdidas en la cartera de inversiones"

Un criterio para valorar la solvencia de una compañía aseguradora puede ser el expresado por C.M. Stewart (90), para él, un propósito primario de la supervisión es asegurarse de que la empresa aseguradora no entra en obligaciones que sea incapaz de cumplir; ha de considerar,por tanto, no solamente el negocio ya aceptado. La compañía habrá de probar una suficiente capacidad financi-era en relación con este último; cuando esta primera prueba ha sido superada, es sabido que la empresa no dependerá de los beneficios del nuevo negocio y de las renovaciones para hacer frente a sus obligaciones.

En este punto nace la pregunta de qué control ha de ser aplicado al nuevo negocio. Evidentemente hay dos posibles formas de control: sobre los riesgos seleccionados y sobre las primas. No aparece apropiado desde el punto de vista técnico y económico tal control, debiendo suponer el futuro del negocio en base a los resultados pasados.

El criterio será entonces que la entidad aseguradora posea unas reservas libres suficientes para hacer frente no solo a la obligaciones actuales, sino tambien eliminar la po sibiliad de que mientras las autoriades estan aplicando sus pruebas, la empresa pase a una situación en la que sea incapaz de hacer frente a sus obligaciones. Este es el criterio que se encuentra implícito en la Teoría del Riesgo, en el caso de considerar un período infinito de tiempo,con la excepción de que en este caso se supone un flujo continuo de nuevo negocio sin intervención de la autoridad supervisora, imponiedose, según Stewart, unos niveles más altos que los estrictamente necesarios en la práctica para las reservas.

II.3.5.1. Una aproximación empírica.

Para Wit y Kastelijn, en los últimos años se ha dado gran importancia al margen de solvencia, siendo influidos los estudios sobre el mismo por la Teoría del Riesgo, en los cálculos, factores tales como el tipo de seguro, tamño de la cartera, - reaseguro etc, tienen un papel fundamental.

"Sin embargo, dichos cálculos, basados puramente en la Teoría del Riesgo, no consideran los riesgos en el campo de las inversiones, costos etc. Pero no debemos olvidar que el margen de solvencia debe tambien actuar como amortiguador de aquellos, en otras palabras, el margen de solvencia debe tener una magnitud suficiente para cubrir todos los riesgos a los cuales está expuesta la entidad aseguradora dentro de unos límites de certidumbre" (91).

En la década de los sesenta hemos de destacar los trabajos de Campagne y los informes de la O.C.D.E relativos a la - problemática planteada por la implantación del margen de solvencia.

Vamos a analizar los resultados de uno de ellos, ya que los mismos son la base de las directrices de la CEE relativas al margen de solvencia.

Definamos dos ratios fundamentales:

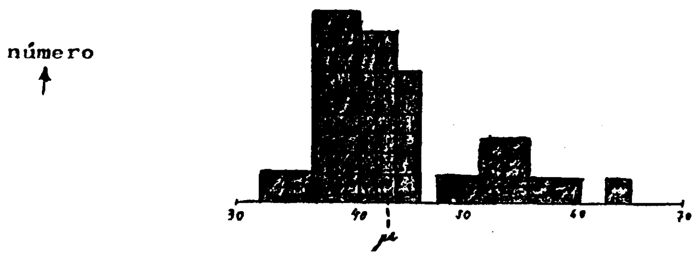
-- ratio de gastos: gastos y comisiones despues de deducir las comisiones recibidas de los reaseguradores, expresados como un porcentaje las primas netas recibidas.

-- ratio de siniestros: siniestros pagados por cuenta -

propia expresados como porcentaje de las primas netas recibidas.

La información se refiere al período comprendido entre los años 1952-1957, y procede de 10 compañías Holandesas.

Los 53 ratios de siniestros calculados pueden ser representados en la siguiente figura:



El ratio medio de gastos fue 53% y el ratio medio de siniestros 43%. Se ajustó una distribución beta al ratio de siniestros

$$f(x,p,q) = \frac{x^{p-1}\ (1 - x)^{q-1}}{B(p,q)} \qquad \text{para } o < x < 1$$

$$= 0 \qquad \text{para } x \leq 0 \text{ ó } x \geq 1$$

siendo $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1 - t)^{q-1}\, dt$

p y q son los parámetros de la distribución y x el ratio de siniestros.

De la definición de dicha distribución de probabilidad se sigue que no existirán ratios de siniestros mayores que 100%

La media y varianza de dicha distribución son:

$$\mu = p/(p + q) \qquad \sigma^2 = (p.q)/(p+q)^2(p+q+1)$$

cuyo valor es 0,43 y 0,089 siendo los valores de P y q, 12,9 y 16,9 respectivamente.

Haciendo uso de la distribución obtenida, elvalor del ratio de siniestros que deja por encima de él un 0,3 por mil de los casos es 78%. Esto significa que si una compañía puede financiar un ratio de siniestros del 78%, la probabilidad de ruina es del 3 por diez mil.

El cálculo del margen de solvencia es entonces:

prima neta retenida.............	100
ratio de gastos	53
queda para pagar siniestros....	47
máximo ratio de siniestros.......	78
margen de solvencia	31

Posteriormente, en el trabajo citado, Wit y Kastelijn realizan un estudio de similares características al de la OCDE para los años 1.976, 1977 y 1978, tomando los datos de 71 compañías holandesas que operan en ramos no-vida.

La definición de los ratios se realiza esta vez sobre primas brutas.

Los resultados para el ratio de siniestros fueron los siguientes

	media	desviación tipica
1.976	74,3	18,8
1.977	72,5	20
1.978	69,1	19,3

para el conjunto de los tres años los valores son 71,7 y 19,4

Es evidente que el ratio medio de siniestros sufrió un considerable incremento entre ambos períodos, lo que trae como consecuencia la posibilidad de que supere 100%. Para aplicar la distribución beta los citados autores dividieron los ratios entre 1,5 (supusieron que el ratio de 150 no se superaría).

Los parámetros de la distribución beta para el conjunto de los tres años resultaron p= 6,68 y q = 7,30.

Por el contrario el ratio medio de gastos resulta inferior al del informe de la OCDE, siendo para los años 76,77 y 78, 30,4, 30,1 y 29,9 respectivamente y su valor conjunto 30,2.

Un análisis análogo al de la OCDE para el período 76-78 en el que se considera el ratio medio de siniestros 30% y varias probabilidades de ruina, nos dá el siguiente resultado

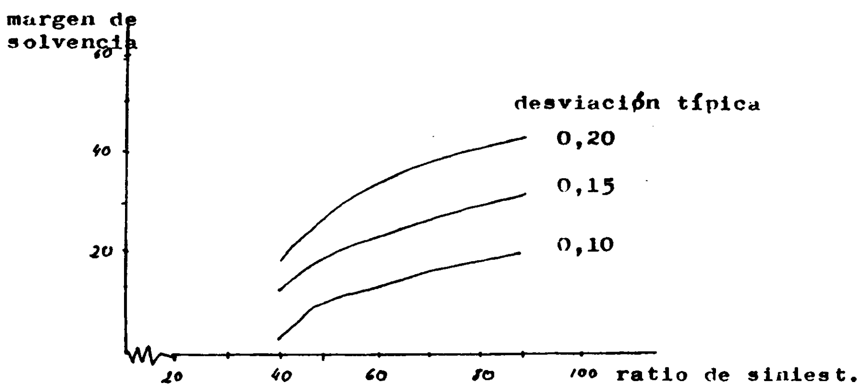
	Probabilidad de ruina		
	1%	1‰	0,3‰
Primas	100	100	100
Ratio de gastos	30	30	30
queda para siniestros.	70	70	70
Máx.ratio siniestrsos	115	126	130
Margen de solvencia	45	56	60

Podemos obtener algunas conclusiones:

-- para una probabilidad de ruina del 0,3 por mil (recordemos el informe de la OCDE) el margen de solvencia necesario es del 60% en vez del 31% (para el periodo 52-57)

-- el valor del margen de solvencia no está solamente - determinado por los ratios de siniestros y gastos, sin embargo tambien, y en un significativo grado por la desviación típica del primero de los ratios.

En la siguiente figura representamos el margen de solvencia para tres diferentes valores de la desviación típica.



En el trabajo que venimos comentando se indica la posibilidad de utilizar la distribución de Weibull para este tipo de estudios. Da unos resultados aceptables y similares a los de la distribución beta, sin plantear el problema del límite superior de la misma.

Viene definida por:

$$g(x,a,b) = \frac{b}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\right) \quad \text{para } x \geq 0$$

$$= 0 \quad \text{para } x < 0$$

II.3.5.2. El margen de solvencia en la C.E.E.

Establecido para el seguro directo no-vida por la Direztriz del Consejo de 23 de julio de 1.973, que dentro de sus considerandos establece:

--"necesidad de además de las reservas técnicas, una complementaria llamada margen de solvencia, representada por el patrimonio libre para hacer frente a los riesgos de explotación".

--"necesidad de un fondo de garantía mínimo en función - de la gravedad del riesgo en los ramos practicados, tanto para asegurar que las empresas dispongan desde el momento de su constitución de medios adecuados, como para garantizar que - en ningún caso el margen de solvencia caiga durante la actividad por debajo de un mínimo de seguridad".

El artículo 17 de la citada norma se refiere en concreto al margen de solvencia.

Establece dos criterios para su calculo:

1.- Criterio de las primas.

Toma como base de cálculo el total de las primas emitidas durante el último ejercicio netas de anulaciones e impuestos y las primas aceptadas en reaseguro. La suma se denomina masa neta.

Esta se transforma en unidades de cuenta y la cantidad resultante se reparte en dos niveles mediante los siguientes - coeficientes de solvencia:

-- 18 por ciento de la parte de la masa neta inferior a

10 millones de unidades de cuenta.

-- 16 por ciento de la parte restante.

La suma de las cantidades resultantes se multimplica por el llamado coeficiente de conservación de siniestros, resultado de dividir los siniestros a cargo de la empresa, deducidos los cedidos al reaseguro, y el importe de los siniestros brutos.

Este coeficiente no podrá ser inferior a 0,5, pues puede ser que, como indica el profesor Prieto,"para conseguir un coeficiente de conservación más bajo, la empresa aumente exageradamente la cesión al reaseguro, cediendo negocio con baja siniestralidad, con la consiguiente disminución de beneficios y por lo tanto disminución del margen de cobertura. Tampoco hay que olvidar que estas primas cedidas al reaseguro, suponen una salida de divisas que influirá negativamente en la balanza de invisibles".

2.- Criterio de los siniestros.

Su base de cálculo es la suma de los siniestros pagados en los dos años anteriores, más los del año actual. A dicha suma se le añade la diferencia entre las reservas para siniestros del último año menos las del primero. Lo mismo para los siniestros del reaseguro aceptado.

El resultado se divide por tres para hallar el promedio de siniestros pagados anualmente. Esta cantidad (masa neta) se convierte a unidades de cuenta.

Los coeficientes de solvencia son en este caso:

-- 26 por ciento de la parte del total inferior a 7 mi llones de unidades de cuenta.

-- 23 por ciento para la parte restante.

La suma de los dos porcentajes se multiplica por el coe ficiente de consevación de siniestros (no inferior a 0,5).

Margen de cobertura: lo s elementos integrantes del mis mo son:

- El capital social desembolsado o fondo fundacional.

- La mitad de la parte no desembolsada del capiral a condición de que la parte desembolsada sea por lo memos del 25 por ciento del capital.

- Las reservas libres o legales libres de compromisos.

- Las cotizaciones adiccionales que las Mutualidades y - Sociedades de forma mutualista, de cotizaciones variables, pu dieran imponer a sus miembros en concento del ejercicio,hasta cierto limite especificado en la directriz.

- Las plusvalías derivadas de la subestimación de elementos de activo y sobreestimación de los elementos de pasivo, siempre y cuando estas plusvalías no tengan un caracter excepcional, y previo acuerdo de las autoridades de control en los paises en que opere la empresa.

En fin, el margen de cobertura lo forma el patrimonio de la empresa libre de todo compromiso previsible, con deducción de los elementos incorporales.

Los activos en que se mat-erializa el margen de cobertu rason de libre elección por parte de la empresa.

De la comparación del margen de cobertura con la mayor de las cifras obtenidas según el criterio de las primas o los siniestros obtenemos el margen de solvencia:

-- margen de solvencia proporcional: resultado de dividir el margen de cobertura entre el mayor de los resultados (primas o siniestros),

-- margen de solvencia diferencial: resultado de restar ambas cantidades.

Fondo de Garantia: es la tercera parte del margen de solvencia, su importe depende por tanto del margen de solvencia, pero no puede ser inferior a ciertos mínimos determimados con arreglo al ramo en que se opera.

Si una empresa no dispone de un margen de cobertura suficiente,la autoridad de control debe exigirle un plan de saneamiento financiero.

Si su patrimonio libre es inferior al fondo de garantía, se deberá someter a la autoridad de control un plan de financiación a corto plazo para su aprobación. El organismo de control puede restringir o prohibir la libre disposición de los activos de la empresa y pedir a los estados miembros donde dicha empresa ejerza su actividad, que tome disposiciones de la misma índole.

Si la empresa no puede alcanzar los objetivos fijados en el plan de saneamiento o de financiación a corto plazo, puede ser objeto de la supresión de la autorización.

II.3.5.3. El margen de solvencia en España.

Se encuentra regulado por el Real Decreto 478/1.978 de 2 de marzo que en su exposición de motivos señala:

"..... la protección que las entidades aseguradoras otorgan a otros sectores, unido a las circunstancias de que sus compromisos sean generalmente a largo plazo y que la efectividad de los mismos dependa de acontecimientos aleatorios hace preciso exigir que las citadas entidades dispongan de un patrimonio propio no comprometido, y que este patrimonio guarde relación con el volumen de negocio de cada empresa, como garantía dinámica de su solvencia, en beneficio de los asegurados, cuyos intereses deben ser protegidos. Medida similar a la mencionada ha sido adoptada en la generalidad de los paises de nuestra area geográfica que tienen estructura económica análoga".

El articulo 2 numero 1 establece la obligación de las entidades aseguradoras de disponer en cada ejercicio económico de un patrimonio propio no comprometido, que guarde con las primas netas de anulaciones, con los siniestros pagados y con las reservas matemáticas, los porcentajes que se determinen en el numero 2, al que más adelante nos referiremos. En los conceptos citados habrán de computarse las cantidades correspondientes al seguro directo, más las del reaseguro aceptado menos las del cedido, estas últimas con el límite del 50 por ciento de las correspondientes al seguro directo. Las primas y reservas matemáticas se referirán a las del ejercicio de que se trate y los siniestros se estimarán por la media aritmética de los últimos tres ejercicios.

Los porcentajes que establece el número dos antes indicado son:

--el seis por ciento de las reservas matemáticas en el ramo de vida.

--el catorce por ciento de las primas o el veintidos por ciento de los siniestros para los ramos distintos del de vida. Se tomará la cifra que resulte superior al aplicar estos porcentajes.

--el diez por ciento de las primas para los ramos en los que el objeto del seguro consista en prestación de servicios.

El número tres define el patrimonio propio no comprometido como la diferencia positiva entre las sumas que integran los conceptos de los dos apartados siguientes:

a) - el capital social desembolsado más el cincuenta por ciento del pendiente de desembolsar, en las Sociedades Anónimas; el fondo mutual en las Mutualidades, más la derrama pasiva exigible a sus mutualistas con el límite del 5 por ciento de las cuotas netas de anulaciones del seguro directo.

- el saldo acreedor con la Casa Central de las delegaciones de sociedades extranjeras.

- el fondo de fluctuación de valores.

- los saldos de las cuentas de regulación de balances.

- el fondo de garantía.

- reservas patrimoniales y saldo acreedor de Perdidas y ganancias.

b)-los gastos de constitución y primer establecimiento

- los gastos de organización.
- el saldo deudor de Pérdidas y Ganancias.
- cualquier otro activo inmaterial,

El número cuarto del articulo que venimos comentando indica que si una Entidad no posee un patrimonio propio suficiente, en el sentido indicado, deberá suspender la emisión de nuevas pólizas; no obstante, podrán solicitar las entidades en dicha situación la concesión por parte del Ministerio de Hacienda de dos años de plazo para alcanzar aquel límite no quedando durante ese período sujetos a la suspensión de nuevas pólizas.

II.3.5.4. La aplicación del margen de solvencia de la C.E.E en España.

Aunque la regulación del margen de solvencia del decreto de 2 de marzo de 1.978, es similar al de la C.E.E, ésta - última presenta unas exigencias superiores a las que actualmente existen para las entidades nacionales.

Examinemos los problemas que se plantearían al sector asegurador español si un presumible ingreso en la Comunidad Económica Europea hiciese aplicable al mismo la legislación comunitaria.(92)

En primer lugar se presenta una dificultad en principio insalvable para las pequeñas entidades: como ya indicamos las normas comunitarias relativas al margen de solvencia, exigen la existencia de un fondo de garantía que en ningún caso puede ser inferior, según la clase de entidad, a ciertos valores (200.000, 300.000 ó 400.000 unidades de cuenta, unos 18, 27 y 36 millones de pts); cantidades que gran número de nuestras - empresas no podrían justificar.

Por otra parte las entidades han de destinar entre el 16 y el 18 por ciento del importe de su crecimiento de primas a complementar el margen; más aún si prevalece el criterio de los siniestros. Aunque pueden aplicar una reducción del 50% como máximo por reaseguro, puede estimarse que ha de dedicarse un 10 por ciento aproximadamente del crecimiento de las - primas a complementar el margen de solvencia,

En un entorno inflacionario, el crecimiento de las primas es considerable, lo que ha de plantear grandes problemas a las entidades para poder justificar el margen de solvencia necesario.

Las medidas que pueden adoptar las entidades aseguradoras son los siguientes:

-- Afectar a la dotación del margen de solvencia los activos libres acumulados anteriormente. Esta medida no resuelve sino que aplaza el problema.

-- No crecer más que en la medi da en que lo permite el margen de solvencia. Esto concentraría la oferta de seguros en las modalidades más rentables, además sería una medida insuficiente en un entorno altamente inflacionario y competitivo.

-- Acudir al mercado de capitales. Esto requiere que los beneficios de explotación permitan la adecuada remuneración del capital a los tipos de interés del mercado, cosa difícil actualmente en nuestro país.

-- La solución apropiada es el incremento de las primas de seguros en cuantía suficiente para generar excedentes que puedan cubrir las nuevas dotaciones al margen de solvencia. Sin embargo esta alternativa plantea algunos problemas, el más importante es que la elevación del precio del servicio supondría una contracción de la demanda además del empeoramiento de imagen.

Es necesario, como ya hemos repetido en varias ocasiones en el presente trabajo, que las dotaciones al margen de solvencia no tributen fiscalmente. Esta es una medida que en las actuales circunstancias creemos inaplazable.

Por otra parte, la mejora en la gestión de nuestras - empresas debe compensar los incrementos en los recargos que para la dotación del margen han de llevar las primas, de forma que el precio final no resulte excesivamente elevado en - relación al del resto de las empresas de la Comunidad, con - las que habremos de competir.

II.4. EL SISTEMA DE INVERSIONES

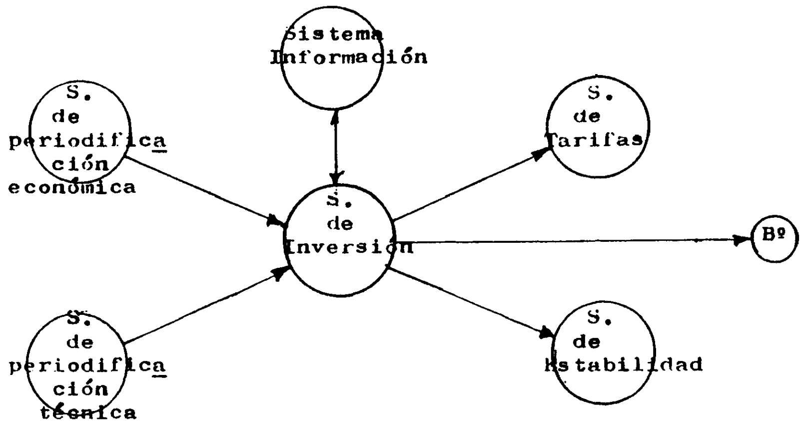
Como indican Beard, Pentikäinen y Pesonen: "desde luego la estructura financiera de la empresa aseguradora depende de los gastos de dirección y de las inversiones de capital además de los aspectos de siniestralidad, sin embargo, aquellos factores no están sujetos a fluctuaciones aleatorias en la misma forma que los siniestros y la Teoría del Riesgo no es, por tanto apropiada para su estudio" (93)

En el presente capítulo nos proponemos dos objetivos: el primero de ellos es la realización de un estudio del sistema de inversión de la empresa de seguros en el marco de la misma. Por otra parte, haremos un intento de ampliación de la estructura financiera de la empresa, hasta ahora sólo consideramos el negocio asegurador estrictamente, integrando éste y el negocio de inversiones. El modelo utilizado nos servirá para analizar la solvencia de la entidad.

Se impone la concepción de un sistema de inversión enmarcado en el conjunto de los sistemas actuariales de la empresa (estabilidad, tarifas, periodificación e información).

En el siguiente grafo aparece dicho sistema. Las decisiones que se tomen en el mismo dependen del sistema de periodificación (naturaleza de cada reserva) y del de información (mercado de capitales, política de inversiones, etc.).

La influencia en las tarifas es evidente en el ramo de vida a través del tipo de interés técnico, aunque en los ramos no-vida puede a su vez tener gran importancia



tambien es clara la influencia sobre la estabilidad de la compañía.

A nuestros efectos distinguiremos entre:

a) Inversiones afectas a reservas técnicas, e

b) Inversiones libres.

Las primeras se encuentran reguladas tanto en la composición de sus activos como en la valoración de los mismos y suponen la parte más importante y en crecimiento de los activos rentables de las empresas de nuestro pais. Asi durante la década de los 70 se ha producido una importante reducción de la relación inversiones globales/reservas técnicas al pasar de 134,31% en 1970 a 128,1 en 1978. (95) Surgen ya que el vencimiento medio de los ingresos (primas) y el vencimiento medio de los gastos (siniestros) no coinciden, mediando un tiempo entre ellos durante el cual retienen liquidez del sistema económico; de aqui nace la condición de intermediarios financieros de las empresas de seguros.

II.4.1 Principios de inversión en las empresas de seguros.

La inversión en la empresa de seguros exige compatibilizar los siguientes principios:

a) La liquidez necesaria para atender el pago de siniestros y demas gastos.

b) La rentabilidad de la inversión

c) La seguridad o riesgo de la inversión.

Si la empresa no compatibiliza estos tres principios estará en desequilibrio financiero (inadecuada liquidez) o desequilibrio económico (falta de rentabilidad o excesivo riesgo de la inversión).

Es posible afirmar que , "una adecuada política de inversiones tendrá implicaciones importantes en el desarrollo cuantitativo y cualitativo de la institución aseguradora, en tanto que puede influir en el precio del seguro y solvencia del ente asegurador.....la gestión de una cartera de inversiones no se limita solamente a la selección, pues es un proceso adaptativo que se inicia con ella y que depende de la coyuntura económica y de cuantos factores la determinan. La gestión de una cartera implica el conocimiento de las preferencias del inversor respecto a la rentabilidad,el riesgo y la liquidez. En no pocos paises el Estado ejerce - en el sector asegurador un control de la solvencia de las entidades que incide en las preferencias primarias de éstas modificándolas".(95)

II.4.1.1 Rentabilidad y riesgo

Para el tratamiento de los problemas de rentabilidad y riesgo de una inversión es útil del modelo de Markowitz, en el cual se recoge la conducta racional del inversor en forma explicta. Dicha conducta consiste en hacer máxima la esperanza matemática del rendimiento esperado, minimizando el riesgo,que es medido por la varianza o desviación típica de los rendimiéntos esperados. Las preferencias del inversor determi-narán en última instancia la combinación rentabilidad riesgo deseadas.

Expliquemos de forma sucinta el modelo de Markowitz:

- Rentabilidad y riesgo de una cartera.

El rendimiento de una cartera E_p viene dado por:

$$E_p = \sum_i X_i R_i$$

donde X_i es la proporción invertida en el título i y Ri el rendimiento de dicho título.

Como señala el profesor Suarez: " ex-post la rentabilidad es una magnitud conocida con certeza. Sin embargo, ex ante se trata de una variable aleatoria de carácter subjetivo...Como variable aleatoria podra tomar distintos valores con unas determinadas probabilidades. La esperanza matemática de dicha variable aleatoria nos proporcionará una medida de su rentabilidad media, mientras que la varianza nos da -

una medida de la dispersión o riesgo." Si lo anterior es válido para un activo en particular, el rendimiento de una cartera sera una variable aleatoria cuya esperanza matemática es

$$E_p = \sum_i X_i E_i$$

donde E_i es la esperanza matemática de R_i

y la desviación tipica y varianza de la rentabilidad de la cartera será:

$$\sigma_p^2 = \sum_i X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i,j} X_i X_j \sigma_{ij} =$$

$$= \sum_i \sum_j X_i X_j \sigma_{ij}$$

donde σ_i^2 es la varianza de R_i y σ_{ij} la covarianza de R_i y R_j.

Siguiendo de nuevo al citado autor, podemos expresar los supuestos fundamentales de los que parte el modelo de Markowitz como:(96)

-- el rendimiento de cualquier título o cartera, es descrito por una variable aleatoria subjetiva, cuya distribución de probabilidad para el periodo de referencia es conocida por el inversor. El valor medio de dicha variable se acepta como medida de la rentabilidad de la inversión.

-- se acepta como medida del riesgo la dispersión (medida por la varianza o desviación típica) de la variable aleatoria que describe el rendimiento, ya sea de un valor individual o de una cartera.

-- la conducta racional del inversor le llevará a preferir aquellos activos financieros con un mayor rendimiento medio esperado y con una varianza menor. La función de utilidad para el inverser vendrá definida por la siguiente relación:

$$U = F(E_p, \sigma_p^2)$$

con las condiciones que debe cumplir:

$$\frac{\partial U}{\partial E_p} > 0 \qquad y \qquad \frac{\partial U}{\partial \sigma_p^2} < 0$$

La busqueda de la cartera óptima se lleva a cabo en tres etapas:

1.- Determinación del conjunto de carteras eficientes

Una cartera es eficiente cuando nos proporciona la máxima ganancia para un riesgo dado, o bien nos proporciona - un riesgo mínimo para un valor dado de la esperanza matemática. El conjunto de carteras eficientes se puede determinar resolviendo el problema de programación cuadrática paramétrico siguiente:

$$\text{Máx} \quad E_p = \sum_i X_i \; E_i \qquad \text{(I)}$$

con la restricción paramétrica:

$$\sigma_p^2 = \sum_i \sum_j X_i X_j \; \sigma_{ij} = V^* \qquad \text{(II)}$$

con la restricción presupuestaria: $\sum_i X_i = 1$

y las condiciones de no negatividad: $X_i \geq 0 \quad i=1,2...N$

El anterior programa es cuadrático porque en la restricción (II) aparecen términos cuadráticos y es paramétrico porque el parámetro V^* puede variar. El problema consiste en buscar la combinación de valores X_i que maximiza la función objetivo (I).y verifica los tres bloques de restricciones. Cada combinación $(X_1, \ldots, X_N)$ nos dá la cartera que maximiza la esperanza matemática de la ganancia para cada valor de la varianza.

El conjunto de carteras eficientes podemos obtenerlo tambien resolviendo el siguiente programa:

$$\text{Mín} \quad \sigma_p^2 = \sum_i \sum_j X_i X_j \ \sigma_{ij}$$

con la restricción paramétrica:

$$E_p = \sum_i X_i E_i = E^*$$

con la restricción presupuestaria $\sum_i X_i = 1$

y las condiciones de no negatividad $X_i \geq 0$

2.- Especificación de la actitud frente al riesgo del inversor.

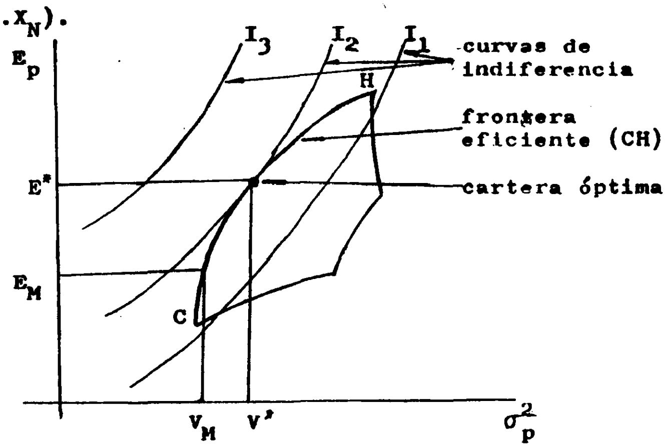
Entre las carteras eficientes el inversor elegirá aquella que mejor responda a sus preferencias. Para determinar la cartera óptima del inversor necesitamos especificar sus curvas de indiferencia entre ganancia y riesgo, cuya forma dependerá de su función de utilidad.

La forma de las curvas de indiferencia dependerá de al indiferencia, aversión o preferencia por el riesgo del inversor.

3.- Determinación de la cartera óptima.

La cartera óptima se corresponderá con el punto en el cual es tangente la curva de carteras eficientes con la curva de indiferencia que proporciona mayor índice de utilidad.

Una vez determinado dicho punto, si sustituimos su correspondiente valor de la varianza V en el primero de los programas y optimizamos obtendremos la combinación de valores $(X_1 \ldots\ldots X_N)$.



La inversión del empresario de seguros (al menos parte de ella) está condicionada a un riesgo máximo permitido V_M (imposición de coeficientes obligatorios de inversión en valores de una cierta seguridad), que se traduce en dicho valor de la varianza.

En caso de que $V_M < V^*$ la cartera de inversión legal estará por debajo de la cartera óptima.

III.4.12. **Rentabilidad y liquidez de las inversiones**

En este punto seguimos a Karl Borch (97): las obligaciones de la compañía de seguros consistirán en general de una cartera de contratos de seguro. Dichas obligaciones deben estar equilibradas por activos que constituirán una cartera de inversiones. El problema será determinar la cartera óptima. Planteemoslo desde el punto de vista de la empresa de seguros comenzando con un simple ejemplo:

Consideremos una compañia de seguros en la siguiente situación:

1.- las obligaciones de la compañía consisten en una cartera de contratos de seguros con distribución de siniestralidad $F(X)$; para simplificar supondremos que la función de densidad existe, esto es, $f(X) = F'(X)$.

2.- los activos de la compañía tienen un valor Y. La compañía será solvente en el sentido actuarial si Y es mayor que el valor esperado de los pagos, esto es:

$$Y > \int_0^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

La probablilidad de ruina para la compañía es $1-F(Y)$. A partir de ahora supondremos que Y es lo suficientemente grande para poder ignorar esta posibilidad.

Supongamos que la compañía puede invertir su capital de forma que obtenga una tasa de retorno r. Si, sin embargo, fuera necesario liquidar una parte de la inversión para pagar siniestros, esto costará C a la compañía.

Si se invierte una cantidad Y - y, y retiene en caja una y, el retorno esperado para la inversión será:

$$P(y) = r(Y - y) - C(1 - F(y))$$

Es lógico suponer que la compañía buscará el valor de y que maximice P(y), y considerará éste el óptimo de caja. Si tal valor de y existe en el intervalo $0 \leq y \leq Y$, debe ser una raiz de la ecuación $P'(y) = -r + Cf(y) = 0$, ó $f(y) = r/C$.

Si la ecuación no posee raices en el intervalo, el retorno esperado será maximizado para y=0 ó y=Y. Si la ecuación tiene dos o más raices, necesitaremos una discusión mayor para determinar la inversión óptima.

Nuestro simple ejemplo puede no ser considerado realista en el sentido de representar los problemas de inversión con los que se encuentra una empresa de seguros en la realidad. Sin embargo el modelo presenta dos puntos de validez general:

-- la naturaleza de las oportunidades eficaces de inversion, en nuestro ejemplo el cociente r/C.

-- los compromisos del inversor, en nuestro caso la distribución de siniestralidad F(X). La distribución de siniestralidad, como vimos en su correspondiente capítulo, puede ser transformada por contratos de reaseguro. Esto significa que las decisiones de inversión y reaseguro, y que pueden ser analizadas conjuntamente nuestro objetivo debería ser encontrar decisiones que son conjuntamente óptimas.

Los contratos de reaseguro han sido tratados con el -

propósito de reducir las fluctuaciones en los resultados en la compañía aseguradora, sin embargo, es necesario indicar que las fluctuaciones pueden ser evitadas o acentuadas por los resultados de las inversiones.

El problema consistirá en determinar la cartera óptima de activos cuando la cantidad útil para invertir esta dada. Hasta ahora en la busca de la cartera óptima se ha dado poca importancia a los compromisos contingentes del inversor, problema relevante para todo tipo de empresa y en particular la aseguradora.

Ampliemos nuestro modelo:

Supongamos que existen n oportunidades de inversión, cada una de las cuales se caracteriza por:

r_i : tasa de retorno

C_i : coste de liquidación

Si la compañía invierte una cantidad y_i en la oportunidad i y retiene en caja una cantidad y_o, la cartera de la compañía puede ser descrita por un vector $y=(y_o, y_1 \ldots y_n)$ - cuyos elementos satisfacen la condición $y_o + y_1 + \cdots + y_n = Y$

Si la compañía tiene que liquidar alguna de sus inversiones, es obvio que primero venderá los activos que tienen un menor coste de liquidación. Es conveniente ordenar las oportunidades de inversión de forma que $C_1 < C_2 < \ldots < C_n$.

Tambien convienen convenir que $Y_j = \sum_{i=0}^{j} y_i$

El retorno esperado para la cartera es entonces:

$$P(y) = \sum_{i=1}^{n} r_i y_i - \sum_{i=1}^{n} C_i \ (1 - F(Y_{i-1}))$$

donde se incluyen solamente los valores de $y_i>0$.

El problema de la compañía es ahora maximizar $P(\bar{y})$, sujeto a la condición $y_o + y_1 + \ldots + y_n = Y$ e $\bar{y}_i>0$

El anterior constituye un problema de programación, cuya solución se dificulta al presentar discontinuidad para $y_i=0$. Una simple aproximación es escribir:

$$P = \sum_{i=1}^{n} r_i(Y_i - Y_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} C_i(1-F(Y_{i-1}))$$

en un primer paso maximizaremos esta función sin restricciones. Derivando parcialmente:

$$\frac{\partial P}{\partial Y_{i-1}} = r_{i-1} - r_i + C_i\ f(Y_{i-1}) = 0$$

o bien

$$f(Y_{i-1}) = \frac{r_i - r_{i-1}}{C_i} \qquad i= 1,2,..,n$$

donde $r_o=0$

Debemos investigar la solución indicada para aquellas condiciones y comprobar si es significativa (esto es $y_i \geq 0$) y si realmente maximiza P.

En nuestro ejemplo, hasta ahora, hemos supuesto que los costos de liquidación C_i son independientes del tamaño de la inversión y de la parte de la inversión que ha deser liquidada para pagar siniestros. Este supuesto es real en algun caso, sin embargo, conduce a discontinuidades en la función de retorno P(y) y dificulta el problema de programción. Es deseable utilizar algun supuesto alternativo.

Supongamos que la compañía tiene un total de activos Y y mantiene en caja y. Si los pagos de siniestros ascienden a

$x > y$, la compañía tendrá que pagar $c(x-y)$. Podemos interpretar c como la pérdida unitaria esperada si una inversión ha de ser liquidada en un periodo no conveniente. Tambien podemos considerar c como la tasa de interes que la compañía habrá de pagar si pide prestado en el mercado en lugar de vender sus activos para pagar siniestros no esperados.

Bajo este supuesto, los ingresos esperados por inversiones serán:

$$P(y) = r(Y-y) - c \int_{y}^{\infty} (x-y)\ f(x)\ dx$$

cuya primera de-rivada es

$$\frac{dP(y)}{d\ y} = -r + c \int_{y}^{\infty} f(x)\ dx = 0$$

o bien

$$F(y) = 1 - r/c$$

Generalizando para el caso en que la compañía posea una cartera de inversiones $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$, los ingresos esperados por inversiones son

$$P(y) = \sum_{i=1}^{n} r_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{Y_{i-1}}^{Y} (x - Y_{i-1}) f(x)\ dx$$

donde r_i es la tasa de retorno y c_i los costos unitarios de liquidación de la inversión i. Como antes tendremos que $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$

Escribiendo

$$P = \sum_{i=1}^{n} r_i (Y_i - Y_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{Y_{i-1}}^{Y_i} (x - Y_{i-1})\ f(x)\ dx$$

la condición de primer orden para un máximo será:

$$\frac{\partial P}{\partial Y_i} = r_i - r_{i+1} - (c_{i+1} - c_i)F(Y_i) + c_{i+1} - c_i = 0$$

o bien

$$F(Y_i) = 1 - \frac{r_{i+1} - r_i}{c_{i+1} - c_i} \qquad i = 0,1,\ldots\ldots,n-1$$

donde $c_o = r_o = 0$

Obtendremos una solución, y es necesario algún cuidado para determinar la cartera,que realmente es óptima. Es - cil notar, que si por ejemplo $Y_{i-1} > Y_i$, no habra inversión en la oportunidad i, esto es $y_i = 0$.

Otro supuesto, que puede resultar realista es algún caso el del de queelos costos de liquidación sean proporcionales al tamaño de la inversión , esto es , el costo de liquidar la inversión i es $c_i y_i$. Los ingresos por inversión esperados serán entonces:

$$P(y) = \sum_{i=1}^{n} r_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c_i y_i (1 - F(Y_{i-1}))$$

este es un modelo similara a los anteriores que tiene una- solución algo mas complicada.

Estos modelos representan una generalización de la - teoría del riesgo colectivo, en ella se considera la probabilidad de ruina, probabilidad de que las reservas de la - compañía ciagan por debajo de un nivel. No es una teoría - completa ya que no nos dice que probabilidades deberían ser consideradas como aceptables y que cantidad desearía pagar la compañía para reducir la probabilidad de un suceso no deseado como la ruina. Los modelos que hemos esudiado solucio nan el problema al considerar los costos incurridos si una caida de las reservas hiciera necesario liquidar las inversiones.

En lo anterior, solamente hemos considerado la cantidad total pagada por siniestros de la cartera de la compañía, no teniendo en cuenta la distribución de estos pagos en el tiempo.

Si los contratos duran n años, es lógico representar la cartera por un vector estocástico $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde x_t representa la cantidad pagada por siniestros en el periodo t. La cartera será entonces completamente descrita por la distribución de probabilidad conjunta $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$. El valor actual esperado será:

$$V = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left(\sum_{t=1}^{n} v^t x_t\right) dF(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

es la reserva técnica de la compañía. Esta cantidad aparece dentro de las obligaciones de la compañía, que habrá de tener al menos la misma cantidad de activos.

Supongamos que los activos de la compañía tienen una serie de ingresos $y=(y_1 \ldots y_t \ldots y_n)$ donde y^t es la cantidad que la compañía recibe en el período t. Podemos suponer que y_t son los intereses que maduran en dicho periodo. Si la compañía fuera solvente en el sentido actuarial clásico, tendremos:

$$\sum_{t=1}^{n} v^t y_t > V$$

que puede ser escrita $$\sum_{t=1}^{n} v^t (y_t - E(x_t)) \geq 0$$

Es posible encontrar valores $y_1 \ldots y_n$ tales que todos los términos del sumatorio del lado izquierdo sean no negativos. Si elgimos tal conjunto de activos y si los pagos por siniestros en cada período son iguales a los esperados, no habrá costos de liquidación. Los ingresos de la compañía en cada periodo son superiores a los gastos. Esto significa que la compañía es inmune a los cambios en la tasa de interés. Las fluctuaciones en la tasa de interés no afectan a la compañía simplemente porque la compañía no espera comprar o vender bonos en el mercado.

Este resultado tiene un valor limitado en la práctica por dos razones: primero porque los pagos por siniestros se pueden desviar de su valor esperado y segundo por la dificultad de encontrar una cartera de inversiones con las características deseadas.

En general las inversiones que inmobilizan capital durante un largo periodo de tiempo darán un mayor retorno que las inversiones a corto plazo. Podemos introducir esto en nuestro modelo suponiesdo que:

$$y_t = (1 + r_t)^t \, \vartheta_t$$

donde

$$r_1 < r_2 \ldots < r_t < \ldots < r_n$$

y

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n = Y$$

donde Y puede ser interpretado como el capital disponible para inversiones. Los ingresos totales de la compañía serán

$$(1 + r_t)^t \, \vartheta_t = W(t)$$

que se maximizan para $\vartheta_n = Y$ y $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \ldots = \vartheta_{n-1} = 0$. Sin embargo si la compañía tiene todas sus activos en inversiones a largo plazo, que dan un retorno solo cuando vencen, es casi seguro que la inversión habrá de ser liquidada para pagar siniestros. El problema es encontrar el equilibrio óptimo entre altos retornos de las inversiones a largo plazo y los costos esperados de una liquidación prematura. Sin entrar en la naturaleza de esos costos, podemos suponer que la compañía tendra un costo K_s para liquidar una inversión s periodos antes de su vencimiento.

La inversion que vence en el periodo t es $x_t = (1-r_t)^t \, \vartheta_t$
Será necesario liquidar esta inversión s periodos antes si

$$X_{t-s} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{t-s} \quad Y_{t-1} = y_1 - \ldots - y_{t-1}$$

y

$$X_{t-s-1} < Y_{t-1}$$

Con lo cual el costo esperado asociado con esta liquidación es

$$K_s \, P_r(X_{t-s} > Y_{t-1} > X_{t-s-1})$$

a partir de estas consideraciones nosotros podemos formular la programación de los problemas generales.

Pasemos a un formulación general.

En un momento del tiempo una compañía de seguros se encontrará en una situación que puede ser descrita por dos procesos estocásticos discretos:

-- el proceso de pagos $x_1, x_2, \ldots, x_t, \ldots$

siendo x_t la cantidad que la compañía paga por siniestos en el periodo t.

-- el proceso de ingresos $y_1, y_2, \ldots, y_t \ldots$

dodde y_t es el total de ingresos que la compañía recibe en el periodo t. Estos ingresos se componen de:

-- $y_t^{(1)}$ dividendos e intereses de inversiones.

-- $y_t^{(2)}$ devoluciones de prestamos que vencen.

-- $y_t^{(3)}$ primas y otros posibles ingrsos.

Las obligaciones pueden ser calculadas como el valor actual esperado de el proceso de pagos, esto es:

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \; E(x_t)$$

Los activos pueden serlo de la misma manera:

$$W = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \; E(y_t)$$

siendo el valor actual esperado de los ingresos por primas

$$W_2 = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \; E(y_t^{(3)})$$

esta cantidad es deducida de V, y la diferencia $V-W_2$ se situa en las obligaciones del balance como reserva de primas

Los ingresos de las inversiones de la compañía podrían en principio ser calculados de la misma manera:

$$W_1 = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \; E(y_t^{(1)} - y_t^{(2)})$$

Esto conduce a una sencilla hoja de balance:

Activos: W_1

Obligaciones: $V - W_2$

La condición de solvencia es que su diferencia sea negativa, esto es:

$$W_1 - (V - W_2) = W - V < 0$$

Los dos procesos estocasticos que describen la situación de la compañía pueden ser cambiados por acciones tomadas por el director. El objetivo de la dirección será entonces tomar encontrar las acciones que dan el mejor posible - para de procesos. Esto significa que en orden a actuar de forma inteligente el director ha de tener un orden de preferencia sobre los pares de procesos estocásticos, esto es, debería ser capaz de decidir si un posible cambio en la situación representa una mejora o no.

II.4.2. EL PERIODO DE MADURACION DE LA EMPRESA ASEGURADORA Y LA INVERSION DE LAS RESERVAS TECNICAS

El período de maduración de la empresa aseguradora

Siguiendo al profesor Fernández Pirla el período de maduración de la empresa viene determinado por "el número de dias que median entre el momento del pago de una unidad monetaria en primeras materias, mano de obra etc,, hasta - el momento de su recuperación por la venta de los productos y correspondiente cobro a los clientes".(98)

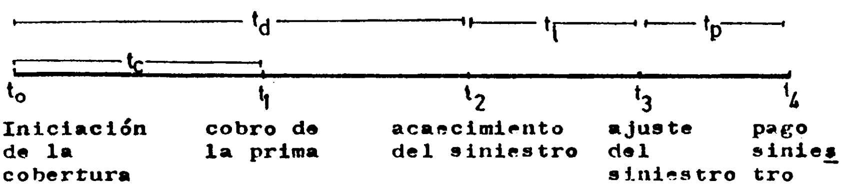
En una empresa de tipo industrial el tratamiento de los problemas de capital circulante y su financiación se hace en base al período de maduración, dividido, dependiendo de las caracteristicas de la empresa, en subperíodos: almacén, fabricación, venta y cobro en el caso más general.

Una carácteristica de la empresa aseguradora radica en la alteración o inversión del proceso productivo; - una empresa de producción normalmente obtiene primero el producto realizando a tal efecto las inversiones y gastos precisos para su obtención: fija el coste del mismo y posteriormente se compensa de los gastos a través de los ingresos de la venta.

La empresa de seguros por el contrario cobra por anticipado la prestación de "seguridad" a sus clientes y a un precio determinado previamente.

Esta característica de la empresa aseguradora no per mite aplicar directamente al anterior concepto a la misma sin modificarlo de forma sustancial. Así definiremos el periodo de maduración de la empresa aseguradora como "el tiempo promedio que transcurre desde que se ingresa una peseta en concepto de primas emitidas hasta que se paga en concepto de indemnización por siniestro" (99)

Podemos representar el ciclo productivo de la empresa aseguradora a través del siguiente esquema:



Donde:

-- t_c es el plazo de cobro: tiempo medio que transcurre desde que se inicia la cobertura hasta que el dinero ingresa en la empresa.

-- t_d plazo de devengo del siniestro: tiempo medio que transcurre desde que inicia la cobertura hasta que acaece el siniestro.

-- t_l plazo de liquidación del siniestro: tiempo medio que transcurre desde que se produce el siniestro hasta que se efectúa el ajuste del mismo.

-- t_p plazo de pago del siniestro: tiempo medio que transcurre desde que el siniestro está ajustado hasta que se realiza el pago del mismo.

En base a la anterior división el periodo de maduración en un sentido económico quedaría definido en la forma:

$$t_e = t_d + t_1 + t_p$$

que considerando el plazo de cobro, en su significado financiero vendría expresado por:

$$t_e' = t_d + t_1 + t_p - t_c$$

Como indica Gorgues Buchon:"no resulta procedente afirmar que en condiciones equivalentes de recursos actua más eficientemente aquella empresa cuyo periodo de maduración es más corto", lo que sucede en empresas transformadoras y comerciales, "las causas que invalidarían esta afirmación se en cuentran en:

-- el ciclo productivo en la actividad aseguradora está financiado por recursos ajenos.

-- en la actividad aseguradora la relación entre la duración del ciclo productivo y el volumen de actividad no posee en mismo sentido que en la actividad transformadora o comercial. En estas últimas para unos determinados recursos el volumen de actividad que le es posible alcanzar viene condicionado por la duración de su ciclo productivo, de forma que cuanto más corto sea éste, mayor rotación imprimirá a su capital. En la actividad aseguradora no se da este condicionamiento dado que en la medida en que se incremente el volumen de su actividad dispondrá de más recursos para la financiación de su ciclo productivo."

Desde el punto de vista financiero cuanto mayor sea el período de maduración, más interesantes serán las condiciones de explotación de una empresa, más aún si consideramos que la actividad inversora se verá favorecida por la disponibilidad de un mayor volumen de recursos en virtud de la liquidez retenida en el proceso productivo.

Cálculo del período de maduración (100)

1.- Plazo de devengo del siniestro.

Si suponemos que las primas vencidas en su componente de riesgo son consumidas a medida que se produce el siniestro, la rotación de las primas emitidas podría expresarse en la forma:

$$r_d = \frac{S}{\frac{\sum_{i=1}^{n}(P_i - S_i)}{n}}$$

siendo:

S los siniestros ocurridos durante el período valorados en el momento del acaecimiento.

S_i los siniestros ocurridos hasta el momento i valorados según estimación en el momento del acaecimiento. (i es la periodicidad de las observaciones, mensuales, trimestrales etc.)

n el número de observaciones.

P_i las primas de riesgo emitidas hasta el momento i.

r_d mediría el número de veces que a lo largo de un ejercicio ha debido renovarse el saldo medio de primas de riesgo no afectadas a la liquidación de siniestros, para hacer frente a los ocurridos en el mismo.

La expreión anterior para r_d habría de ser modificada en el caso de que las estimaciones de los siniestros devengados no fuera congruente con las primas de riesgos emitidos (exceso o defecto de siniestralidad estimada); estariamos utilizando valoraciones heterogeneas. Podriamos introducir un coeficiente corrector $\underline{a}$ calculado en la forma P/S donde P son las primas de riesgo emitidas en el período.

-- a   1 en el caso de defecto de la siniestralidad esperada.

-- a = 1 en el caso de congruencia de primas y siniestros.

-- a   1 en el caso de exceso de siniestralidad.

Tendremos entonces:

$$r_d = \frac{a.S}{\frac{\sum_{i=1}^{n}(P_i - aS_i)}{n}}$$

siendo $\boxed{t_d = 360/r_d}$

2.- Plazo de liquidación de los siniestros

La rotación de los siniestros pendientes de liquidación es:

$$r_1 = \frac{S'}{\frac{\sum_{i=1}^{n}(S_i - S_i')}{n}}$$

donde:

S'es el importe de los siniestros liquidados durante el ejercicio.

S_i' el importe de los siniestros liquidados hasta el momento i.

Si las liquidaciones de siniestros devengados durante el ejercicio fueran coincidentes con las estimaciones que de los mismos se hicieren, S = S', el cociente anterior no requeriría corrección alguna, si no fuera así, sería necesario introducir un factor b= S/S'de corrección con lo que tendriamos:

$$r_1 = \frac{b.S'}{\frac{\sum_{i=1}^{n}(S_i - b.S_i')}{n}}$$

con lo cual

$$\boxed{t_1 = 360/r_1}$$

3.- Plazo de pago de siniestros

Las rotaciones de saldos medios de siniestros liquidados pendientes de pago, serían:

$$r_p = \frac{S''}{\frac{\sum_{i=1}^{n}(S_i' - S_i'')}{n}}$$

donde:

S''son los siniestros pagados en el ejercicio

S_i'' los siniestros pagados hasta el momento i

con lo cual $\boxed{t_p = 360/r_p}$

4.- Plazo de cobro

Al igual que en los casos anteriores tendremos:

$$r_c = \frac{P'}{\frac{\sum_{i=1}^{n}(P_i'' - P_i''')}{n}}$$

donde:

P' son las primas de riesgo cobradas durante el ejercicio

P_i'' las primas de riesgo pendientes de cobro hasta el momento i, incorporadas a los recibos pendientes de cobro

P_i''' primas de riesgos pendientes de cobro hasta el momento i cuyo cobro ya ha sido notificado por el agente.

Asi pues
$$\boxed{t_c = 360/r_c}$$

El período de maduración y la inversión de las reservas técnicas.

Si suponemos que la emisión y cobro de primas asi como el pago de siniestros, presentan una distribución uniforme a lo largo del período económico, la liquidez retenida por la empresa aseguradora, expresada en función del promedio - diario de primas emitidas y del período de maduración en su aspecto financiero sería:(100)

$$L_o = p.t_e'$$

donde p es el promedio diario de primas emitidas de riesgo.

Fijandonos en el esquema del principio del epígrafe, las primas emitidas en t_o no serán necesarias para el pago de siniestros hasta t_4 $(t_4 - t_o = t_e)$, de igual forma no lo serán las emitidas entre t_o y t_4. En este caso tendremos

$$L_o = p.t_e$$

Si tenemos en cuenta que entre la emisión de las primas y su cobro existe un período de tiempo, habremos de tener en cuenta este hecho y la liquidez realmente retenida será:

$$L_o = p.\,(t_e - t_c) =$$
$$= p.t_e'$$

como se indicó al principio.

La liquidez variará en la medida que lo hagan los pagos por siniestros con respecto a las primas de riesgo emitidas.

Si s es el tanto unitario de siniestralidad: para s=1 la liquidez retenida inicialmente se mantendrá, si s< 1 la liquidez se incrementará como sonsecuencia del margen de beneficio por siniestralidad y si s> 1 la liquidez se reducirá por el exceso de siniestralidad.

Si sustituimos t_e' en la relación anterior tendremos:

$$L_o = p.(t_d + t_l + t_p - t_c) =$$
$$= p.t_d + p.t_l + p.t_p - p.t_c$$

donde

$p.t_d$ es la liquidez retenida por el tiempo que transcurre desde que se inicia la cobertura hasta que acaece el siniestro.

$p.t_l$ la liquidez retenida por la demora en la liquidación de los siniestros.

$p.t_p$ liquidez retenida por la demora en el pago de siniestros.

$p.t_c$ merma de liquidez tenida por la demora en el cobro de los recibos

Las condiciones de equilibrio entre recursos retenidos e inmovilizados podemos plantearlas, en terminos globales como:

L_o = reservas de riesgos en curso - reservas siniestros pendientes de liquicación y/o pago.

y en terminos parciales

$p.t_d - p.t_c$ = reservas de riesgos en curso (RRC)

$p.t_l + p.t_p$ = reservas de siniestros pendientes. (RSP)

Ahora bien, es importante destacar un hecho. Existe una normativa legal, que obliga a inmovilizar una cuantía de recursos financieros, pero, que no tiene en cuenta las condiciones de explotación de cada empresa. Y por otra parte cada empresa tiene unas características internas de explotación que le permite retener una parte de los recursos aportados por los asegurados.

Asi,por ejemplo, si calculamos la reserva de riesgos en curso por el método forfait, esta sera:

$$RRC = \frac{1}{2} P$$

que en términos de promedio diario de primas de riesgo emitidas será:

$$RRC = \frac{1}{2}.360.p = 180.p$$

de lo anteriormente indicado se sigue que:

$$p.t_d - p.t_c = 180.p$$

o lo que es lo mismo

$$t_d - t_c = 180$$

La conclusión es muy simple: la diferencia entre el plazo de devengo de siniestros y el plazo de cobro habrá de ser igual a 180 dias si queremos que la materialización de las reservas de riesgos en curso se financie con los recursos facilitados por los asegurados, en la medida de que dicha diferencia exceda de los 180 dias, las condiciones internas de explotación permitirán retener unos recursos cuya inversión podrá ser realizada en total libertad por parte de la empresa, con criterios de rentabilidad y riesgo. Si por el contrario la diferencia fuera inferior a 180 dias la empresa tendrá que financiar parcialmente con sus recursos propios la materialización de las reservas de riesgos en curso.

En cuanto a la reserva para siniestros pendientes, podemos descomponerla en: reserva para siniestros pendientes de liquidación y reserva para siniestros pendientes de pago con lo que tendremos:

$$p.t_l + p.t_p = RSPL + RSPP$$

Si la estimación de los siniestros pendientes de pago y de los siniestros pendientes de liquidación corresponden a la realidad de la empresa tendremos:

$$p.t_l = RSPL \quad y \quad p.t_p = RSPP$$

II.4.3. Regulación de la inversión de las resefvas técnicas.

Como indica García Esteban:"tanto el patrimonio propio de la empresa aseguradora (capital social y reservas patrimoniales), como el importe de las reservas técnicas derivadas de las operaciones del seguro directo (matemáticas, de riesgos en curso, capitales vencidos,o rentas o beneficios de los asegurados pendientes de liquidación o pago) que figuran en el pasivo del balance, han de estar materializados en determi-nados bienes o derechos que se reflejan en las diversas cuentas de activo." (101)

La vigente legislación no pone inaonveniente alguno a la libertad en la inversión del patrimonio propio si exceptuamos los indicado en el artículo 14.f de la citada ley de Seguros Privados de 14 de diciembre de 1.954 al prohibir a las entidades de seguros operar en cualquier industria o negocio distinto de los de seguros.

Por el contrario la inversión de las reservas técnicas si se encuentra ampliamente regulada: el articulo 22 de la ley de Seguros Privados indica los bienes en que han de ser invertidas las reservas técnicas asi como la parte en que dichas inversiones han de estar depositadas en la Caja General de Depósitos. Las normas que a partir de su publicación han desarrollado este artículo son:

- Decreto 2.875/1.970 de 12 de septiembre; Orden Ministerial de 24 de mayo de 1.971 y Real Decreto 467/1977 de 11 de marzo, disposiciones ya derogadas.

- Real Decreto 1.341/1978 de 2 de junio y la Orden Ministerial de 4 de septiembre de 1.978 y el Real Decreto 478/1978 en su primer artículo. Estas constituyen la normativa vigente en cuanto a regulación de la inversiones de las reservas técnicas.

En derecho comparado encontramos legislaciones en que como la española regulan las inversiones de la totalidad de las reservas técnicas, como sucede en Francia, Bélgica, Portugal y varios paises hispanoamericanos; otras reglamentan solamente las reservas matemáticas como sucede en Suiza, Austria, Holanda, Alemania, Italia.; y,por fin, otros que dejan libertad inversora absoluta como sucede en Inglaterra Irlanda e Islandia.

Los objetivos de la regulación de inversiones son básicamente:

1.- La solvencia como objetivo fundamental que ha de regir la regulación de las inversiones (102). Recordemos en este punto algunas notas que hacen del seguro un negocio de interés público:

a) necesidad en la actividad económica que se manifiesta en:

- facilitar las transacciones de crédito.

- animar la inversiones en empresas expuestas a riesgos tales como incendios, huracanes, robos etc, sustituyendo un costo desconocido y variable por una cantidad que puede ser presupuestada por adelantado.

- el seguro reduce el costo de soportar el riesgo de los anteriores sucesos y por tanto ayuda a disminuir los precios de los productos.

b) Ante la insolvencia de un asegurador, los asegurados pueden tener que hacer frente a una pérdida superior al pago de la prima en caso de tener que soportar algún siniestro.

c) Los aseguradores retienen e invierten grandes cantidades de dinero cobradas por adelantado a los asegurados con la promesa de pago de siniestros que les puedan acaecer.

2.- La consecución de los objetivos del Estado:

a) Financiando la actividad estatal.

b) Canalizando de forma selectiva las inversiones a sectores y empresas que se deseen potenciar.

3.- En paises en los cuales existen grandes empresas aseguradoras, uno de los objetivos de la regulación de sus inversiones es el control del grado de concentración del poder económico.

Características del sistema de regulación de la inversión de las reservas técnicas en España.

La vigente legislación sobre el tema posee las siguientes características:

1.- Define un conjunto de activos, en los cuáles han de invertirse las reservas tecnicas, así como se indica una distribución de la mismas en distintos grupos de activos.

El articulo primero del decreto 1341/1978 de 2 de julio en su primer párrafo establece la siguiente distribución:

a) El treinta por ciento como mínimo de las reservas matemáticas y de riesgos en curso deducidos los anticipos sobre pólizas se invertirá en Deuda Pública del Estado Español...

b) Otro treinta por ciento como mínimo de las reservas mencionadas en el apartado anterior se invertirá en valores públicos, industriales o comerciales españoles que reunan los requisitos de los articulos cuarto y quinto.

c) El restante cuarenta por ciento de las reservas aludidas en el apartado a); la totalidad de las reservas para siniestros capitales vencidos, rentas o beneficios de los asegurados pendientes de pago.....y la parte retenida de los siniestros pendientes de liquidación, tanto del seguro directo como del reaseguro aceptado, habrán de estar cubiertas por: Efectivo en caja y bancos, efectos comerciales, valores mobiliarios de los mencionados en los apartados precedentes, préstamos sobre valores, inmuebles, hipotecas, propiedades forestales y primas pendientes de cobro.

Posteriormente en los artículos tercero a sexto, y octabo a doce indica las características que han de cumplir los activos genéricamente enunciados antes para que puedan ser considerados aptos a efectos de la inversión de las reservas técnicas. En resumen son:

-- El saldo de caja estará materializado en metálico o en billetes del banco de España. (art.3.1)

-- El saldo en Bancos o Cajas de Ahorro será el disponible a la vista o a plazo en cuentas abiertas a favor de la entidad. (art.3.2)

-- Los efectos comerciales habrán de estar avalados por sociedad inscrita en el Registro de Bancos y Banqueros o Caja de Ahorros, su plazo de vencimiento pendiente será inferior a dieciocho meses. (art.3.3)

-- Los anticipos sobre pólizas del ramo de vida deberán se otorgados sobre contratos de la propia entidad aseguradora y ajustarse a la cuantía establecida en la póliza.(art.3.4.)

-- La Deuda Pública se admitirá sin limitación alguna. (art.4.1)

-- Los restantes valores públicos deberán cotizar en Bolsa o Bolsín. (art.4.2)

-- Los títulos de renta fija de entidades industriales comerciales o financieras han de cotizar en Bolsa o Bolsín y la suma de capital desembolsado y reservas ser superior a doscientos millones de pesetas. (art.4.3)

-- Los valores de renta variable han de haber cotizado en Bolsa o Bolsín al menos cien dias al año, su volumen de contratación ha de ser al menos el 1,5% del capital social desembolsado; su cotización media no ha de haber sido inferior al noventa por ciento del valor nominal.y la suma de - capital desembolsado y reservas patrimoniales de la empresa emisora no ha de ser inferior a quinientos millones de pesetas. Dedica condiciones especiales a fondos y sociedades de inversión mobiliarias, sociedades anónimca inmobiliarias y no permite acciones de entidades aseguradoras, reaseguradoras y de capitalización. (art.5). La Dirección General de - Seguros publicará una lista de valores aptos el primer trimestre de cada año. (art. 8)

-- Posteriormente (arts. 7, 9, 10, 11,y 12) establece los requisitos de los prestamos sobre valores, inmuebles urbanos, créditos hipotecarios, propiedades forestales y primas pendientes de cobro.

Es evidente que esta primera característica del sistema regulador de inversiones persigue dos objetivos: la solvencia ya que los valores anunciados son cualificados tanto en cuanto a la permanencia de su valor como a su posibilidad de realización, por otra parte dirige la inversión en una parte importante hacia la Deuda y valores públicos.

2.- Establece el depósito de parte obligatorio de - parte de las inversiones:

Asi el articulo segundo del comentado Real Decreto dice en su parrafo primero: "el importe mínimo de los valores a que se refieren los apartados a) y b) del artículo primero se depositará necesariamente en la Caja General de

Depósitos o en el Banco de España..."

En el segundo párrafo estable que la cuantía del depó sito se determinará al cierre del ejercicio, habiendose de realizarse las ampliaciones necesarias, si fueran necesarias en los siguientes seis meses.

Aunque el Decreto posibilita el canje de valores, el establecimiento del depósito trae consigo la pérdida de la libre disposición de la empresa de seguros de sus inversiones que es uno de los instrumentos necesarios para la vigilancia y control de las mismas, de forma que cuando una inversión seleccionada pierde alguna de las características por las que lo fue, es evidente que ha de ser cambiada por otra ya que la selección de la cartera de inversiones debe converirse en un acto de permanente gestión del empresario.

3.- Es de destacar tambien la limitación impuesta a la inversión en ciertos activos.

Asi por ejemplo solo se admite el saldo de caja que no supere el diez por ciento de los saldos bancarios a favor de la entidad.

Pero más importantes son los límites impuestos a la inversión en títulos emitidos por entidades industriales, comerciales o financieras (de los anteriormente citados).

En este sentido el artículo séptimo establece los siguientes límites para la inversión en los citados títulos:

Uno. En relación a las reservas técnicas: el diez por ciento de éstas en valores de una misma empresa, si bien podrá alcanzar el veinte por ciento cuando se trate de participaciones de un fondo de acciones de una sociedad de inversión mobiliaria o de una sociedad inmobiliaria de las comprendidas en los números dos y cuatro del articulo quinto...

Dos. En relación con la entidad emisora: El diez por ciento de los valores puestos en circulación por la misma, salvo que se trate de participaciones de un fondo o acciones de una sociedad de inversión mobiliaria o de una sociedad inmobiliaria de las comprendidas en los números dos y cuatro del artículo quinto, que podrá alcanzar el veinte por cien del primero, el sesenta y siete de las segundas y el cien por cien de las últimas....

Resulta evidente que el establecimiento de los anteriores límites presenta dos objetivos básicos: el primero de ellos es obligar a una conveniente diversificación de las inversiones y por tanto del riesgo de las mismas, en segundo lugar al no permitir una elevada participación en las empresas emisoras impide que el asegurador adquiera el control de las mismas, lo que significaría utilizar la inversión de las reservas técnicas más en interés del asegurador que para hacer frente a los posibles pagos por siniestros.

Cuando los asegurados pagan las primas, no están invirtiendo en la empresa aseguradora, sino que estan comprando un seguro. Ellos no tienen porqué correr los riesgos de un accionista o un inversor. (103)

4.- Establecimiento de unos criterios para la valoración de los activos afectos a la cobertura de reservas técnicas.

El capitulo tercero, articulos quince a dieciocho, del comentado Real Decreto que regula la inversión de las reservas técnicas, fija los criterios de valoración de los diferentes elementos de activo afectos a la cobertura de dichas reservas. En concreto se refieren a: moneda extranjera, valores mobiliarios, bienes inmuebles y creditos hipotecaries.

Como indica Gorgues Buchon: "los criterios de valoración han sido seleccionados bajo la preocupación de garantizar la solvencia estática del asegurador, contemplando a la empresa en situación de liquidación, lo que conduce a valoraciones basadas en el valor probable de realización. (104)

II.5. CONSIDERACION CONJUNTA DEL NEGOCIO DE SEGUROS Y DE INVERSIONES: LA ESTABILIDAD DE LA EMPRESA ASEGURADORA.

En el capítulo dedicado a la estabilidad de la empresa de seguros, estudiábamos el problema de la ruina, en base a la Teoría del Riesgo Colectivo que considera únicamente la actividad aseguradora propiamente dicha.

No hemos de olvidar, sin embargo, que la empresa aseguradora realiza otras actividades, que aun no siendo su objeto fundamental, pueden influir en su supervivencia. Entre estas últimas, es quizá la inversora la que presenta mayor importancia (no olvidemos el carácter de intermediario financiero de la empresa de seguros).

Parece oportuno realizar el intento de aunar el negocio de seguro y de inversión, estudiando la estabilidad del ente asegurador desde esta nueva perspectiva.

Para ello utilizaremos un modelo planteado por Y. Kahane (105) a través del cual desarrolla los conceptos anteriores y que emplea para analizar las formas tradicionales de regulación de la solvencia de la empresa aseguradora.

A.- En una primera y simple aproximación al modelo consideremos una empresa de seguros limitada a una sola actividad de seguro y de inversión. En este caso podrá controlar su rentabilidad y riesgo con el simple cambio del volumen de primas con un capital dado. El ratio primas/capitales libres tendrá gran importancia en el modelo, "leverage" para el autor.

Propondremos una definición de ruina bajo el supuesto -

de que ocurre solo en un determinado momento, por ejemplo, al final del período examinado.

El asegurador tendrá que elegir entre varias estrategias del negocio que se pueden resumir en una elección entre rentabilidad y riesgo (recordemos lo apuntado en el estudio de la Teoría de la Cartera). Tradicionalmente se utiliza el retorno esperado como medida de la rentabilidad y la desviación típica como medida del riesgo.

Las estrategias eficientes serán aquellas que tienen la más pequeña desviación típica para un nivel de retorno esperado. El conjunto de dichas estrategias puede ser representado en la figura de la página siguiente por la curva FF', comunmente denominada frontera eficiente.

Sea, por tanto, un asegurador que posee una actividad aseguradora y una única oportunidad de inversión. Si las ganancias totales para un período las representamos por $\hat{Y}$, tendremos:

$$\hat{Y} = \hat{U} + \hat{I}$$

donde $\hat{U}$ e $\hat{I}$ representan el beneficio total del negocio de seguro e inversión respectivamente. Siendo:

-- P las primas.

-- A los activos.

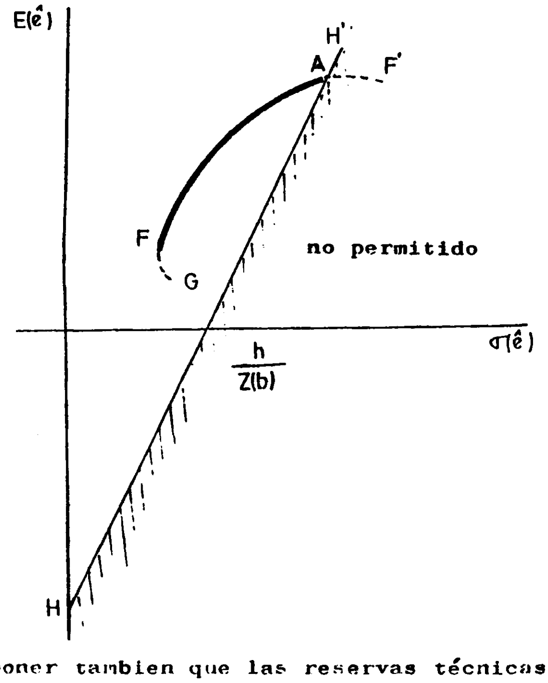
-- $\hat{r}_1 = \hat{U}/P$ la tasa de beneficio del negocio de seguro.

-- $\hat{r}_2 = \hat{I}/A$ la tasa de retorno de las inversiones.

la tasa de retorno sobre el capital $\hat{e}$, será:

$$\hat{e} = \hat{Y}/S = \hat{r}_1.P/S + \hat{r}_2.A/S$$

donde S representa el capital libre de la entidad.



Podemos suponer tambien que las reservas técnicas de la compañía son iguales a un cierto múltiplo g de las primas, esto - es, cada peseta de primas produce g pesetas de reservas. Entonces el total de activos puede ser representado en la forma

$$\text{(III)} \qquad A = S + g.P$$

que sustituido en (I) nos da:

$$\text{(IV)} \qquad \hat{e} = k.\hat{r}_1 + (1 + g.k).\hat{r}_2$$

siendo $k=P/S$ el ratio indicado, primas suscritas por unidad de capital.

<u>La única variable de decisión en (IV) es k</u>, el beneficio y el riesgo del asegurador están determinados por ella. - La rentabilidad de la compañía puede ser medida por el retor-

no esperado sobre el capital $\hat{e}$

(V) $\quad E(\hat{e}) = k.E(\hat{r}_1) + (1 + g.k).E(\hat{r}_2)$

siendo la varianza:

(VI) $\quad V(\hat{e}) = k^2V(\hat{r}_1) + (1+kg)^2V(\hat{r}_2) + 2k(1+gk)Cov(\hat{r}_1,\hat{r}_2)$

Las dos anteriores ecuaciones nos describen el conjunto de oportunidades, esto es, todas las posibles combinaciones - de retorno esperado y desviación tipica que la compañía puede conseguir variando k. Este conjunto, como ya hemos indicado,- viene representado por la curva FF'de la figura anterior.

Examinemos la relación entre la rentabilidad de la compañía y su solvencia. Definiremos la ruina en este caso como una situación en la cual la tasa de retorno sobre el capital $\hat{e}$, variable aleatoria, cae por debajo de un cierto nivel h. Establecer una regulación estándar de solvencia es equivalente a determinar el nivel de h y un cierto límite superior, b, de la probabilidad de ruina de forma que

(VII) $\quad P(\hat{e} \leq h) \leq b$

que en forma tipificada queda:

(VIII) $\quad P\left(\frac{\hat{e}-E(\hat{e})}{\sigma(\hat{e})}\right) \leq \frac{h - E(\hat{e})}{\sigma(\hat{e})} \leq b$

suponiendo la distribución normal de $\hat{e}$, $N(E(\hat{e}), \sigma(e))$, podemos encontrar un valor z(b) que cumpla:

(IX) $\quad \frac{h - E(\hat{e})}{\sigma(\hat{e})} \leq z(b)$

o bien

(X) $\quad E(\hat{e}) \geq h - z(b)\,\sigma(\hat{e})$

El requerimiento de solvencia (X) determina las combina ciones de rentabilidad y riesgo en las cuales no se puede encontrar la compañía. Dicha desiguladad divide el plano por la linea HH.

El problema es definir cual es la pérdida que define la ruina.

En la anterior representación observamos que la restricción de ruina puede cortar la frontera eficiente. La intersección permite distinguir entre estrategias permisibles y no permisibles, en el caso representado, la compañía sólo podría operar en la zona FA de la frontera eficiente. Existe una relación directa entre k y el retorno esperado. Entonces la intersección puede ser interpretada tambien como definitoria de un rango permisible para k. Como consecuencia la restricción probabilística de la ruina puede ser transformada directamente en una restricción más práctica sobre k. Las condiciones bajo las cuales tal transformación es posible son estudiadas a través de un análisis de la frontera eficiente:

La frontera eficiente es descrita por una ecuación cuadrática tipicamente hiperbólica. Esto sucede ya que $E(\hat{a})$ es lineal con k, mientras que $V(\hat{a})$ es cuadrática con k. Podemos mostralo analizando (V) y (VI). (V) puede ser escrito como:

$$(XI) \quad E(\hat{a}) = E(\hat{r}_2) + k(g.E(\hat{r}_2) + E(\hat{r}_1))$$

$E(\hat{a})$ se incrementa con k si:

$$(XII) \quad g.E(\hat{r}_2) \geq -E(\hat{r}_1)$$

de igual forma (VI) como función de k es:

$$(XIII) \quad V(\hat{a}) = 2g\mathrm{Cov}(\hat{r}_1,\hat{r}_2)k^2 + (2gV(\hat{r}_2) + 2\mathrm{Cov}(\hat{r}_1,\hat{r}_2))k$$

ó (XIV) $V(\hat{s}) = ak^2 + bk + c$

$V(\hat{s})$ es cuadrática con k, como podemos observar, y presenta - un extremo en $k=-b/2a$, mínimo posiblemente ya que la frontera eficiente debe ser cóncava.

Debido a la forma cuadrática de la frontera eficiente y su naturaleza cóncava, puede no tener intersecciones o como - mucho tener dos con la restricción de ruina. Esto da lugar a varias formas de regulación de la solvencia a través de restricciones sobre k.

1.- Si solo existe una intersección entre la restricción de ruina y la frontera, se pueden dar dos casos dependiendo - de la forma de la frontera:

a) Que el retorno esperado se incremente con k.- Observando la figura 1, en la curva ABC alguna combinación de la - AB es ineficiente ya que está dominada por B. Por encima de B al incrementar k, se incrementarán tanto el retorno esperado como la varianza. Suponiendo que solamente existe una inter-- sección entre la frontera eficiente y la restricción de ruina, la frontera quedará dividida en dos secciones:

-- los puntos de la sección BC que cumplen con la res - tricción de ruina.

-- la sección superior CD que es considerada demasiado arriesgado y por tanto, no permisible.

En este caso la restricción de ruina probabilística pue de ser transformada en una restricción de ruina sobre k:

Poseer un ratio k superior al del punto C no estaría per mitido.

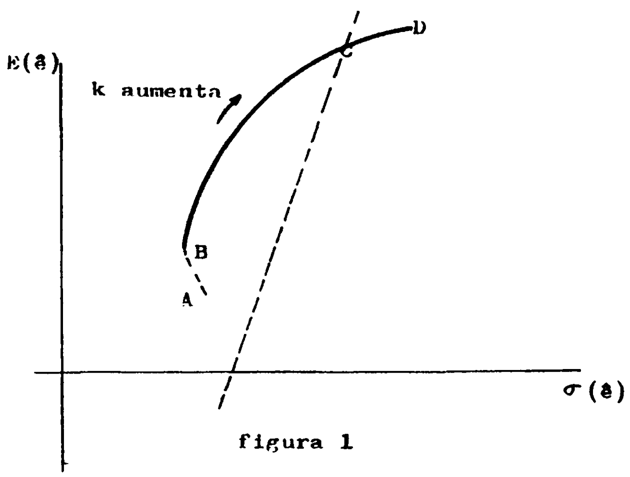


figura 1

b) El retorno esperado disminuye con k.- En este caso - la curva ABD en la figura 2 representa el conjunto de opotunidades.

-- la seccion CD se encuentra dentro de la sección prohibida y además representa los más bajos valores de k..

La restricción de ruina podría ser transformada en una regulación que prohibe el uso de un k más bajo del nivel de - ruina de C.

Por otra parte, una regulación que impone un límite superior a k es redundante si el límite regulado está por encima del valor de k del punto B, ya que la sección es, en cualquier caso, ineficiente y la empresa no tendrá un mayor k incluso sin la regulación.

Una situación como esta no es muy real y ocurre cuando la tasa esperada de beneficio del seguro es fuertemente negativa.

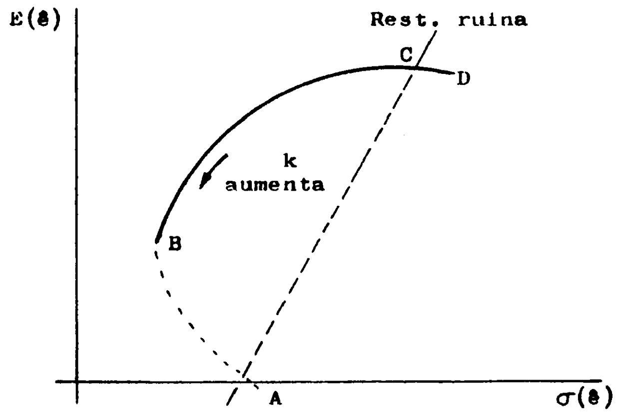


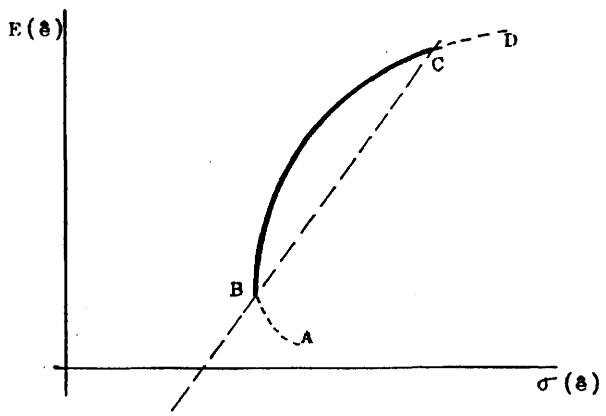
Figura 2.

2.- Existen dos intersecciones con la frontera eficiente

Es otro caso peculiar que puede resultar de la naturaleza cóncava de la frontera. En este caso (ver figura 3) el regulador fija un límite superior y otro inferior al nivel de k del asegurador. La compañía tendrá que operar en unos niveles intermedios de k comprendidos entre los puntos B y C.

Este caso es bastante raro y puede darse cuando la concavidad es notable, por ejemplo, cuando existe una fuerte relación negativa entre $\hat{U}$ e $\hat{I}$.

El análisis de este caso simplificado, solo una actividad aseguradora y de inversión ha mostrado que la imposición de una restricción superior a k es una práctica razonable, excepto en algunos casos raros. Pasemos a estudiar modelos más complejos que nos revelarán algunas deficiencias en tales métodos de regulación.



B. Múltiples actividades de seguro e inversión. Tiempo discreto.

Sea una compañía aseguradora que considera la venta de m pólizas de seguros de varios tipos y la inversión en n-m - tipos de activos. Los retornos de estas actividades son variables aleatorias $\hat{r}_i$ con conocida (y aproximadamente normal) - distribución. El retorno sobre el capital, $\hat{s}$, es una combinación lineal de esas variables aleatorias y, por tanto, tambien normalmente distribuida..

$$\hat{s} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \hat{r}_i$$

donde:

$$r_i = \begin{cases} \text{tasa de beneficio de la i-esima póliza de seguros (porcentaje de la prima) para } i=1,..,m \text{ y} \\ \text{tasa de retorno de la inversión i (porcentaje de los activos) para } i=m-1,\ m-2,......,n \end{cases}$$

y

$$a_i = \begin{cases} \text{ratio prima póliza i / capital} \\ i= 1,2,\ldots,m \quad \text{y} \\ \text{ratio entre lo invertido en el activo i y} \\ \text{capital} \quad i = m+1, m+2, \ldots, n \end{cases}$$

$$a_i \geq 0 \quad (i= 1,2,\ldots,m,\ldots n)$$

Los términos a_i serán considerados las variables de decisión de la empresa. Esto es, podrá seleccionar el vector de los a_i que satisfaga una función objetivo que será especificada más adelante. Procedamos en primer lugar al cálculo de la frontera eficiente.

Supondremos que el asegurador desea minimizar la varianza de la tasa de retorno sobre su capital para un nivel del valor esperado. Entonces el objetivo será la composición de los pesos a_i de forma que:

$$\text{(XV)} \qquad \text{Mín } L = \text{Var}(\hat{e}) - E(\hat{e})$$

donde

$$E(\hat{e}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \; E(\hat{r}_i)$$

$$\text{Var}(\hat{e}) = \sum_{(i,j)=1}^{n} a_i a_j \; \text{Cov}(\hat{r}_i, \hat{r}_j)$$

Los valores de a_i deben ser determinados de tal manera que el total de activo menos obligaciones iguale al capital libre. Entonces la optimación estará sujeta a las restricciones del balance, además de otras que no serán discutidas aquí.

La solución del problema nos proporcionará la frontera eficiente de la empresa, esto es, el conjunto de las mejores combinaciones de rentabilidad y riesgo de la empresa. Cada punto de la frontera representa una cierta composición de -

carteras de seguros e inversiones que poseen la más pequeña - desviación típica para un nivel dado de rentabilidad. La rentabilidad esperada y su desviación típica determinan la solidez de la empresa.

Estudiemos la efectividad de la regulación de la solvencia si consideramos este modelo. Lo normal es que exista alguna restricción sobre el ratio k. Es útil a este efectodescribir la frontera eficiente como la envolvente de las fronteras individuales obtenidas con valores de k predeterminados. Resolvamos el problema de optimación (XV) con la restricción adicional de que k sea constante a un nivel k_o, representado por $\sum_{i=1}^{m} a_i$, cantidad de primas por cada peseta de capital. La restricción toma la forma $\sum_{i=1}^{m} a_i = k_o$.

Este procedimiento genera una frontera eficiente distinta para cada nivel k_o. Repitiendo el proceso para diferentes valores, generaremos un conjunto de fronteras eficientes (ver la figura 4). Cuando el problema es resuelto sin la anterior - restricción, obtendremos una frontera envolvente que es tangente a esas curvas.

Un movimiento a lo largo de la curva envolvente FCF', significa un cambio en el valor de k, además de los correspondientes cambios en la composición de las carteras de seguros e inversiones.

Superpongamos la restricción de ruina dada por la ecuación (X), obtendremos la línea HH'. Como se puede apreciar en la figura, la restricción de ruina no puede ser transformada directamente en una restricción sobre k: la restricción de k

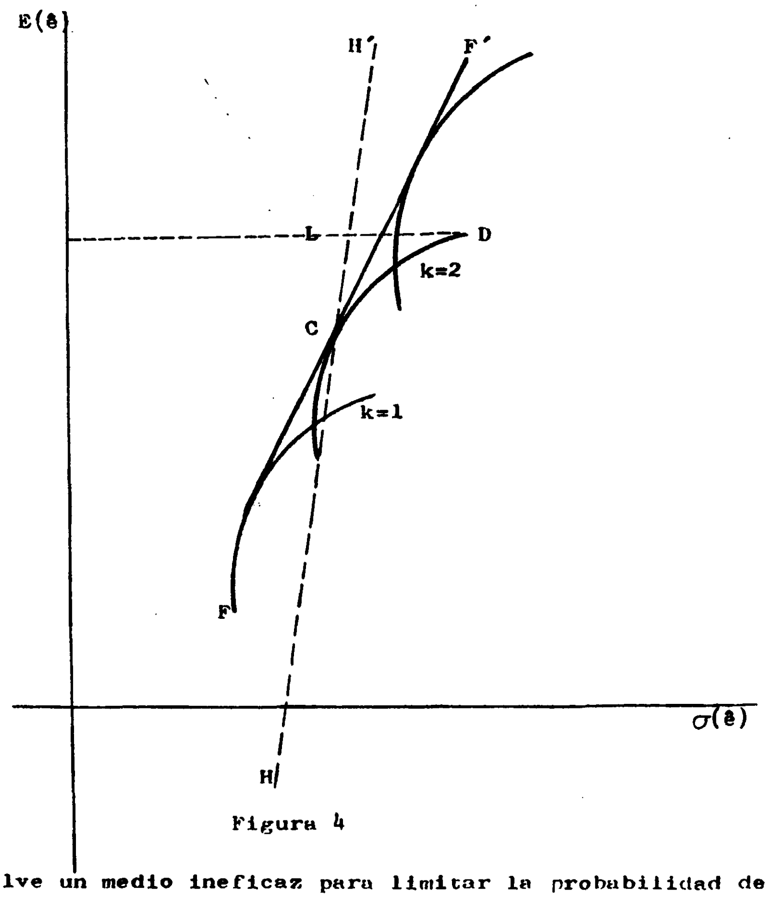


Figura 4

se vuelve un medio ineficaz para limitar la probabilidad de ruina.

Supongamos que el punto C es la intersección de la frontera FCF' con la restricción de ruina correspondiente a un k^* ($k^* = 2$ en el caso concreto). Usar k^* como la restricción de regulación significa que la nueva frontera es obtenida resolviendo (XV) sujeto a la restricción adiccional $\sum_{j=1}^{n} a_i \leq k^*$ (XVI)

La frontera resultante vendrá dada por la curva FCD. Es ta es una combinación de la sección FC de la frontera sin restricciones más la CD donde la nueva restricción esta incluida.

El asegurador puede tener una cartera D que cumpla con la restricción (XVI) sobre k , pero claramente no cumplirá con la restricción de ruina (D está debajo de HH'). El asegurador puede alcanzar un excesivo nivel de riesgo a pesar de la regulación. Más aún, la existencia de dicha regulación puede incitar al asegurador a obtener una cartera ineficaz: sin regulación el asegurador podría obtener una cartera con el mismo beneficio esperado pero con una más pequeña varianza (por ejemplo la cartera L en lugar de D).

En forma similar, las restricciones sobre la composición de la cartera se vuelven ineficaces también.

Tales restricciones truncan la frontera eficiente para cada nivel de k y presionan hacia abajo y derecha de la misma Para un ratio k dado la frontera restringida ABC de la figura 5 está presionada a un nivel más bajo DEF. En cuanto el asegurador está en libertad para elegir el nivel de k, el cambio - es desde la envolvente IBJ a GEL.

El objetivo de la regulación no se consigue ya que el asegurador puede incrementar indefinidamente su rentabilidad - esperada sobre capital y su desviación típica, simplemente incrementando k. Entonces se puede obtener una cartera con una excesiva probabilidad de ruina (por ejemplo la L de la figura 5). Lo anterior conduce a que los requerimientos de capital - mínimo o las restricciones sobre la composición de la cartera por si mismas, no puedan ser consideradas como un medio efecti

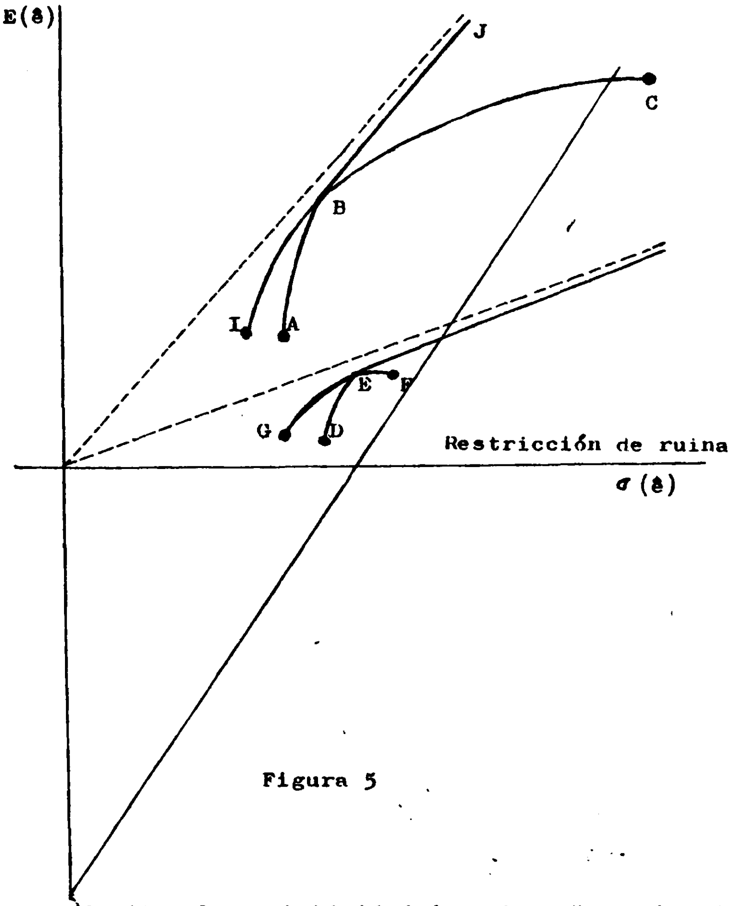


Figura 5

vo para limitar la probabilidad de ruina. Este objetivo puede conseguirse usando simultáneamente ambos instrumentos.

Examinemos el último de los modelos planteados en el que se intenta un mayor acercamiento a la realidad.

En el mismo se introducirá una estructura continua de tiempo así como un sistema de castigos, que por otra parte, es bastante utilizado por los reguladores en la práctica.

C. Sistema de castigos y estructura continua de tiempo.

En este modelo supondremos que los"castigos"pueden considerarse como un importante instrumento de regulación, habiendo de tener un gran cuidado en la elección de un sistema punitivo óptimo.

Existirán tambien diferencias técnicas entre el presente modelo y los anteriores: la estructura de tiempo discreto utilizado en los dos primeros modelos es sustituida por una estructura de tiempo continuo. Además el supuesto de siniestralidad distribuida normalmente es reemplazado por el proceso de Poisson Compuesto.

El desarrollo del modelo trae consigo un complejo aparato matemático. El problema puede simplificarse olvidando el supuesto de multiples actividades y volviendo al de una simple actividad, como en el primer caso.

Seguirá la idea de modelo de supervivencia en una estructura de tiempo continua que ha sido discutido por Buhlmann y Haliin, por ejemplo. Recientemente un estudio más amplio es el realizado por Tapiero Zuckermann y Kahane en el año 1978 Nosotros explicaremos sus rasgos mas importantes y resultados olvidandonos de su formulación matemática.

La novedad del modelo (TZK) es el uso de una nueva definición de ruina; en los modelos anteriores, una empresa que viola las regulaciones es considerada arruinada y por tanto habrá de salir del negocio. En el presente caso tal situación trae consigo el pago de una penalización que permite a la empresa reanudar sus actividades. El castigo puede tomar varias formas: un saneamiento, costos adiccionales de reorganización etc. Tal modelo da una mejor descripción de la realidad ya - que los aseguradores, despues de practicamente arruinados, a menudo reanudan sus actividades por el camino de las fusio - nes, reaseguros etc. Esta sutuación puede ser considerada como más razonable ya que la situación de ruina pu de resultar de la naturaleza aleatoria de los procesos de siniestralidad y reservas, y la continuación de actividades despues de casi arruinada puede llevar a una recuperación a largo plazo. El - TZK integra los costos de la penalizaciones en los factores - considerados por la dirección cuando selecciona su estrategia óptima.

Basicamente su funcinnamiento es: el proceso de reser - vas de la empresa es afectado por las entradas de primas y pa gos de siniestros. Supondremos que las primas llegan a una ta sa constante igual a la de siniestros esperados más un recargo proporcional. Los siniestros ocurren segun la distribución de Poisson y se suponen variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas. La reserva neta de la empresa en un momento del tiempo es la reserva inicial más la diferencia en tre primas y siniestros.

El proceso de reservas esta sujeto a algunas restriccio nes que nos dan las bases para una optimización del problema. Por una parte hay un nivel mínimo de reserva K, requerido por el regulador. La violación de este requerimiento de capital - trae consigo un castigo a la empresa. Este puede ser una combinación de varios elementos: uno fijo por traspasar K y uno proporcional dependiendo de lo alejado de K que se encuentre, por ejemplo. El costo puede ser considerado como el de un préstamo dado a la empresa infractora para que retorne al nivel de reservas K. Tambien puede representar el costo de convertir otros activos en caja.

La empresa deseará poseer unas reservas superiores a K para evitar traspasar la barrera impuesta por el regulador. Sin embargo la empresa moderará su deseo de poseer unas reservas infinitas que le supondrán un costo de oportunidad.

Una variable de decisión (una barrera política) A debe ser introducida. Esta representa el nivel inicial de reservas. Una cantidad de reservas superior a este nivel incurre en un costo r. Si la reserva cae por debajo de A, la entidad retendrá toda la acumulación neta de primas manteniendola en forma de caja. Si la reservas caen por debajo de K, habrá una penali

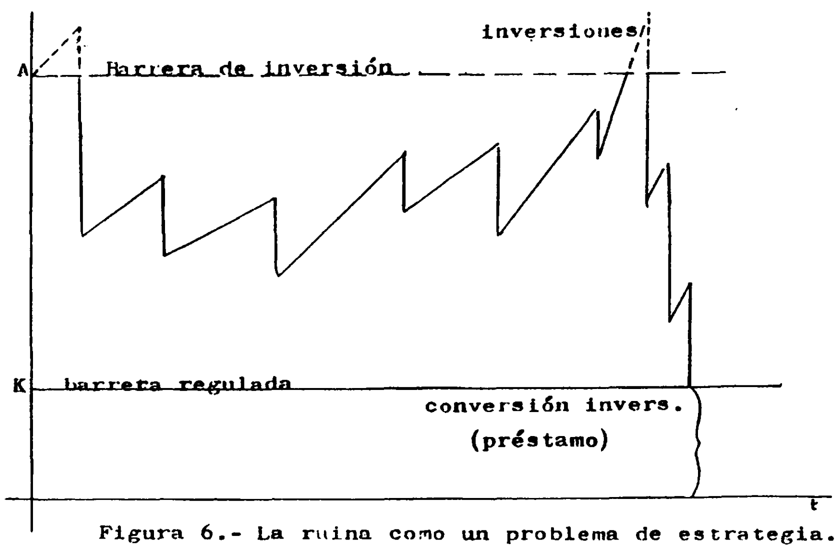


Figura 6.- La ruina como un problema de estrategia.

zación, retornando automaticamente al nivel de reservas K.

El beneficio a largo plazo es una función de la reserva minima K , los elementos de costo y la barrera estratégica A. A través de la teoría del control, esta función puede ser especificada y estudiada. De esta será posible derivar algunas magnitudes de interés tales como el tiempo esperado entre los sucesos de transgresión de los minimos regulados. El beneficio esperado puede especificarse y encontrada la estrategia óptima A. La fórmula es desarrollada por el TZK. Su desarrollo matemático es muy complicado,incluso cuando los parámetros están dados y la distribución de siniestralidad es conocida es necesario utilizar metodos númericos para encontrar la estrategia óptima.

Los castigos son introducidos en el sistema para internalizar los costos externos de la insolvencia. Si el costo de la ruina es considerado por el director más bajo que el costo desde el punto de vista social, la política de la empresa será tomar un riesgo excesivo. El problema de los reguladores seria equilibar los costos internos y externos.

Hemos de considerar que el tamaño del castigo puede afectar A. Esto a menudo no es considerado por los reguladores ya que el sistema de castigos esta determinada en forma arbitaria.El modelo puede ser utilizado para determinar el castigo óptimo en el sentido de ser el más pequeño par una probabilidad de ruina dada.

La regulación fijará el mínimo capital requerido K y el castigo po su transgresión. Estos parámetros motivarán a la -

empresa a mantener una reserva A mayor que K.

Existe una relación de intercambio entre el capital mínimo requerido y el tamaño del castigo en el sentido de que diferentes políticas pueden llevarnos a un mismo nivel de reservas A y por tanto a la misma probabilidad de ruina. Los reguladores pueden preferir incrementar los castigos por causas políticas mas que el capital mínimo requerido.

Desde el punto de vista de las decisiones de la empresa, este modelo puede dar alguna luz al problema de la regulación: es objetivo de la regulación prevenir ruinas deliberadamente causadas y esto puede ser logrado introduciendo un castigo potencial en el sistema. Los directores tomarán este castigo en cuenta en la toma de sus decisiones. Estudios empíricos muestran que una de las razones maps importantes de la caida de intermediarios financieros fue el fraude. Las técnicas comunes de regulación restringiendo el ratio k (primas/capitales libres) son ineficaces para prevenir este tipo de ruinas. El sistema de castigos expuesto puede servir mejor a este objetivo.

II.6. EL SISTEMA DE PERIODIFICACION

Su objeto es la obtención del beneficio imputable al periodo económico considerado. Por tanto, se han de delimitar los gastos e ingresos que corresponden al mismo.

En la empresa aseguradora distinguiremos:

a) La periodificación económica.- En ella consideraremos aquella que tiene su origen en los ingresos (primas), que para los seguros no-vida se realizará a través de las reservas de riesgos en curso. Mediante ellas imputaremos las primas al ejercicio en que se han devengado con independencia de su cobro.

Por otra parte consideraremos aquella que tiene su origen en los gastos (siniestros) y se realizará a traves de la reserva para siniestros pendientes, que imputarán los gastos al ejercicio en que se han devengado con independencia de su pago.

b) La periodificación técnica.- Realizada por las reservas de estabilidad. Surge de concebir el beneficio como un proceso de largo plazo, va más allá de la simple imputación económica de ingresos y gastos al ejercicio. Habremos de mantener la solvencia dinámica de la empresa como condición previa a la fijación del beneficio atribuible al ejercicio.

El estudio de las reservas de estabilidad ya ha sido realizado en la presente obra ; por tanto, nos proponemos en lo que sigue desarrollar las ideas expuestas sobre la periodificación económica.

II.6.1 EL BENEFICIO ECONOMICO.- LA PERIODIFICACIÓN.

Toda empresa presenta dos corrientes: una de ingresos y otra de gastos. La determinación del beneficio económico del ejercicio nos presenta la necesidad de delimitar los ingresos y gastos que pertenecen a dicho ejercicio, esta operación recibe el nombre de periodificación.

En una empresa de seguros, el beneficio periodificado vendrá dado por:

$$B_p = I_p - G_p - \Delta R_e$$

ésto es, la diferencia de los ingresos totales periodificados con los gastos totales periodificados y la dotación de la reserva de estabilización.

Simplificando podemos suponer que los ingresos vienen dados por las primas comerciales: prima recargada mas recargos para gastos de gestión y adquisición.

En cuanto los gastos, podemos suponer que se componen de siniestros, gastos de gestión y gastos de adquisición; supongamos que estos últimos se corresponden con el recargo para gastos de adquisición y que el recargo de seguridad servirá para dotar la reserva de estabilidad.

De lo anterior deducimos que la periodificación de la prima comercial queda reducida a la prima de inventario (prima de riesgo y gastos de gestión). Según esto, llegaremos al concepto de reservas de riesgos en curso: parte de las primas de inventario imputables económicamente a otros ejercicios.

Con lo cual, si P_e'' son las primas emitidas netas de anulaciones, los ingresos periodificados serán:

$$I_p = P_e'' + R_o - R_1$$

donde R_o y R_1 son las reservas de riesgos en curso del ejercicio anterior y del presente respectivamente.

En cuanto a los gastos periodificados:

$$G_p = S_e - S_o + S_1 + G_g + G_a$$

donde sus componentes son respectivamente: siniestros pagados en el ejercicio, siniestros pendientes del ejercicio anterior , reserva siniestros pendientes del presente ejercicio, gastos de gestión imputables al ejercicio y gastos de adquisición imputables al mismo.

Por tanto el beneficio económico periddificados será:

$$B_p = (P_e'' + R_o + S_o) - (S_e + S_1 + G_g + R_1 + \Delta R_e).$$

Así pues, las reservas técnicas, reservas de riesgos en curso y reservas de siniestros pendientes, no son, en principio, más que ingresos y gastos periodificados para la fijación del beneficio económico del ejercicio, constituirán la periodificación económica.

Las reservas de solvencia realizarán la periodificación técnica a la que nos hemos referido al realizar el estudio de las mismas dentro del sistema de estabilidad. Su dotación estará en función de los resultados técnicos del ejercicio.

II.6.2. RESERVAS TECNICAS.

II.6.2.1 RESERVAS DE RIESGOS EN CURSO.

Anteriormente vimos como surge el concepto de las reservas de riesgos en curso. Ahora estudiaremos como se calculan según la legislación vigente y posteriormente examinaremos dichas reservas como un elemento de la solvencia de la compañía.

Cálculo de la reserva de riesgos en curso.

El artículo 21 apartado b de la Ley de Seguros Privados de 16 de diciembre de 1.954 indica que la reserva de riesgos en curso estará constituida por la parte de primas emitidas destinadas al cumplimiento de futuras obligaciones no extinguidas en el ejercicio corriente.

De los articulos 10 y 106 del Reglamento de Seguros podemos deducir que las primas que han de servir de base son las primas emitidas en el ejercicio netas de anulaciones y más concretamente al indicar la autorización de deducir hasta un 30% de los gastos de adquisición anticipados la prima que servirá de base será la de inventario, como ya supusimos anteriormente.

Es importante tambien tener en cuenta a la hora de obtener esta reserva el período para el que se ha calculado la prima.

En cuanto a los métodos de cálculo el artículo 10 del citado Reglamento de 1.912 distingue dos:

a) Prorrata temporis: consiste en hacer la hipótesis de considerar las primas emitidas en la mitad de cada mes.

Según este método, si las primas son anuales y suponien do que la prima de inventario es el 70% de la prima comercial, la reserva de riesgos en curso será:

$$R.R.C. = \left(\frac{1}{24} \sum P''_e + \frac{3}{24} \sum P''_f + \text{------} + \frac{23}{24} \sum P''_d \right) .0,7$$

siendo P''las primas comerciales del correspondiente mes netas de anulaciones.

Si las primas fueran fraccionarias, por ejemplo, trimestrales, solo habría que ser constituida la reserva para las primas emitidas en los tres últimos meses, asi la reserva de riesgos en curso será:

$$R.R.C. = \left(\frac{1}{6} \sum P''_o + \frac{3}{6} \sum P''_n + \frac{5}{6} \sum P''_d \right) .0,7$$

b) Global o forfait: consiste en hacer la hipótesis de considerar las primas emitidas en la mitad del período de cálculo de las mismas.

Asi, si las primas fueran anuales, la reserva de riesgos en curso será la mitad de las primas de inventario y si suponemos que estas últimas son los dos tercios de la prima comercial tendremos:

$$R.R.C. = \frac{1}{2} \sum P' = \frac{1}{2} . \frac{2}{3} \sum P'' = \frac{1}{3} \sum P''$$

donde P'y P''son las primas de inventario y comerciales netas de anulaciones.

Para primas fraccionarias, supongamos en este caso semestrales, y por tanto se considerarán únicamente las emitidas en el segundo semestre y como emitidas a mitad del mismo, ten dremos que las reservas serán:

$$R.R.C = \frac{1}{2} \sum P_2'$$

esto es la mitad de las primas de inventario del segundo semestre.

Otros ejemplos de calculo de las reservas de riesgos en curso los podemos encontrar en la obra de Garcia Esteban "Contabilidad de Seguros"

Las reservas de riesgos en curso como elemento del cálculo del resultado y de la solvencia.

Al comienzo del presente capítulo vimos como las reservas técnicas surgen de forma natural al desear calcular el resultado imputable a un ejercicio económico. Ahora estudiaremos las reservas de riesgos en curso tanto desde esta perspectiva como desde el punto de vista de elemento de la solvencia de la compañía.

En este punto sigamos un trabajo de Roberto Gorgues Buchon (106). Para él, bajo la denominación de reservas de riesgos en curso se procede a la periodificación de dos conceptos de ingresos distintos: la prima de riesgo y el recargo para gastos de gestión interna.

En cuanto se refiere a la prima de riesgo constituye:

a) un elemento necesario para el cálculo del resultado.

b) un elemento necesario para el cálculo de la solvencia.

Desde el primer punto de vista, en la medida en que la prima cubra un período que sobrepase el final del ejercicio, habrá que preservar de los resultados del mismo la fracción de prima que sea imputable a ese exceso por dos razones:

-- porque no corresponde a la actividad desarrollada por el asegurador en el ejercicio, y

-- porque los fondos que retiene serán necesarios al asegurador para el desarrollo de su actividad en ejercicios posteriores

Desde el punto de vista de la solvencia del asegurador las reservas de riesgos en curso suponen:

-- la valoración en términos probabilísticos de las obligaciones pendientes del asegurador para con el asegurado, relativas a la cobertura de riesgos durante una fracción de tiempo del ejercicio que va a comenzar.

-- el coste de las posibles cancelaciones de pólizas, al ser anulada la póliza en determinadas condiciones en las que el asegurado tiene derecho al extorno de la prima correspondiente al riesgo no corrido por el asegurador.

El citado autor continua indicando, que según la finalidad perseguida, procederá la aplicación de unos u otros criterios de valoración en el cálculo de las reservas de riesgos en curso.

1.- Si la valoración persigue la correcta determinación de los resultados periódicos, la prima de-berá imputarse a los diferentes ejercicios en función de la forma en que temporalmente se distribuya la intensidad del riesgo entre los mismos, esto es, habrá que tomar en consideración el factor de estacionalidad. Aceptando la distribución uniforme del -

riesgo a lo largo del período de seguro, la prima se distribuirá entre los diferentes ejercicios en proporción directa a tiempo que corresponda a cada uno de ellos.

2.- Si la valoración tiene por objeto el delimitar la situación de solvencia estática del asegurador, la prima no constituirá una buena base para esta valoración. Deberemos partir entonces de la obligación del asegurador de la cobertura del riesgo.

El grado de coincidencia de los resultados obtenidos sería maximo en el caso de que las primas percibidas por el asegurador fueran la medida fiel de la siniestralidad acusada por su cartera.

En caso de existir una sobrevaloración de primas tendremos:

a) dando preferencia a la determinación del resultado períodico (bajo la hipótesis de distribución uniforme): los resultados estarían correctamente calculados, ya que en cada ejercicio se liberaría el margen de sobrevaloración de las primas, que es imputable a la actividad desarrollada en el mismo. Por otra parte, la solvencia del asegurador aparecería infravalorada en la medida en que sus obligaciones estan sobrevaloradas con respecto a la siniestralidad real.

b) dando preferencia a la valoración correcta de la solvencia del asegurador (valorando las reservas de riesgos en curso en función de la siniestralidad experimentada): los resultados estarían sobrevalorados en la medida en que al ser imputados al mismo la totalidad del margen implícito en la -

prima, estarían considerando como resultados del ejercicio, beneficios todavía no realizados, relativos a la cobertura del riesgo pendiente de satisfacer. Por el contrario la situación de solve-ncia del asegurador estaría evaluada en sus justor términos.

Si las tarifas estuvieran infravaloradas:

a) dando preferencia a la determinación del resultado periódico, bajo la misma hipótesis anterior: los resultados del ejercicio estarían correctamente calculados, soportando - cada ejercicio el déficit en las primas imputables a la actividad desarrollada en el mismo. La solvencia del asegurador sería sobrestimada en la medida en que sus obligaciones pendientes estarían infravaloradas por el déficit relativo a las primas imputables al ejercicio siguiente.

b) dando preferencia a la valoracion correcta de la - solvencia, valorando las reservas en función de la siniestralidad experimentada: los resultados del ejercicio estarían infravalorados, en tanto que dicho período soportaría soportaría, además del déficit imputable a la actividad en él realizada, el correspondiente a la actividad pendiente de desarrollar. Por el contrario, la situación de solvencia podría ser correctamente evaluada, en la medida que la valoración de sus obligaciones se ha realizado en base a la siniestralidad qe es de esperar en función de la experiencia.

Asi pues, del criterio seguido en nuestro pais para el cálculo de las reservas expuesto anteriormente podemos decir:

si nos referimos únicamente a la componente de la prima de riesgo:

-- Permite la correcta periodificación de los resultados.

-- En caso de infravaloración de tarifas, los resultados de su aplicación contradicen el principio de prudencia valorativa, que supone la contabilización de pérdidas en cuanto sean conocidas.

-- Participa de los mismos defectos que las primas

-- Los resultados de su aplicación son verificables.

-- Se sobreestimará la solvencia en caso de insuficiencia de primas.

-- Se subestimará la solvencia de la compañía en caso de tarifas sobrevaloradas, por la existencia de reservas ocultas.

En cuanto a lo que respecta a la periodificación del recargo para gastos de gestión interna, que se destina a cubrir los gastos que suponga la administración de la póliza durante el período de seguro, podemos indicar la diferenciación entre los gastos de gestión interna de consumo inmediato y de consumo diferido. Según esto solo se periodificarían los segundos. Esta distinción no se recoge, como hemos visto, en nuestra legislación, por lo cual se periodifica la totalidad del recargo en proporción al tiempo. De aqui se deriva una infravaloración de los resultados y sobrevaloración de las reservas de riesgos en curso en la medida en que la casi totalidad de los gastos por este concepto tienen lugar al co mienzo del periodo de seguro. Estos efectos serán más acusados cuanto mayor sea el crecimiento de su cartera.

Por otra parte, el hecho de que los recargos incluidos en las primas comerciales puedan tener diferente cuantía y finalidad, pone en crisis el sistema tradicional de cálculo constante, sistema forfait, de la reserva de riesgos en curso, para convertirse en un problema de decisión del empresario. Dos empresas de seguros de igual dimensión de primas comerciales, pueden tener diferentes reservas de riesgo en curso en función de los recargos adoptados (107).

II.622 RESERVAS PARA SINIESTROS PENDIENTES

El tratamiento de las mismas será realizado en la misma linea que las reservas de riesgos en curso: es evidente que las reservas para siniestros pendientes surgen de la periodificación de los siniestros con el fin de calcular el beneficio imputable al ejercicio; pero tambien suponen un elemento de la solvencia de la compañía.

Una escasa valoración de las reservas de siniestros pendientes tiene dos consecuencias: una directa, al "inflar" el beneficio del ejercicio y otra sobreestimando la solvencia de la compañía al no valorar suficientemente los siniestros que pertencientes al presente ejercicio, serán pagados en períodos posteriores.

En una linea de prudencia valorativa se situa Harald Bohman en un trabajo presentado al 20 Congreso Internacional de Actuarios, en el cual indica dos métodos de calculo para las reservas técnicas de la compañía, prospectivo y retrespectivo, recomendando usar el que mayor valor de reservas proporcione. (108)

Base legal de cálculo en España.

El articulo 21 apartado c de la citada ley de Seguros Privados, impone a las entidades de seguros constituir dentro de sus reservas técnicas la de siniestros capitales vencidos, rentas o beneficios de los asegurados pendientes de liquidación o pago, que estará integrada por:

-- el importe total de los capitales de seguros de vida vencidas y rentas y beneficios de los asegurados pendientes dd pago.

-- El importe definitivo de los siniestros de tramitación terminada pendientes sólo de pago a los asegurados.

-- El importe presunto de los siniestros en tramitación valorados según las reglas que fije el Reglamento.

La O.M. de 7 de junio de 1.971 establece para del Seguro Voluntario de Automóviles el siguiente sistema para el cálculo de la reserva para siniestros pendientes de tramitación o pago; la misma estará formada por:

-- El importe definitivo de los siniestros de tramitación terminada pendientes sólo de pago, total o parcial.

-- El importe presunto de los siniestros en tramitación correspondientes a los distintos ejercicios de ocurrencia valorados como se establece posteriormente.

-- De la suma de los anteriores apartados se deducen los pagos efectuados a cuenta de cada uno de ellos.

<u>Métodos de cálculo de la reserva para siniestros</u>.

Hemos de distinguir dos tipos de siniestros por los que habremos de constituir la correspondiente reserva:

-- Aquellos siniestros conocidos, notificados a la entidad antes del cierre del ejercicio y todavía pendientes de liquidación o/y pago.

-- Aquellos siniestros desconocidos por la entidad al cierre del ejercicio debidos al tiempo que transcurre entre el acaecimiento del siniestro y su notificación a la companía

Por tanto constituiremos:

<u>Reserva de siniestros conocidos</u>.- los cuales estarán catalogados uno por uno. Su cálculo se puede realizar:

-- Caso por caso

-- Método colectivo: cuando el método anterior en laborioso por el gran número de siniestros pendientes.

Estableceremos un coeficiente α_{t-h} que reflejará en porcentaje la relación de siniestros conocidos en t-h y pagados en t o posterior, a las primas del año t-h. La reserva será:

$$R_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{t-i} \cdot P_{t-i}$$

los coeficientes α_{t-i} se calcularán en base a la propia experiencia o de la de varias entidades.

<u>Reserva de siniestros desconocidos</u>.- siendo:

t el año de notificación del siniestro a la entidad.

t-h el año en que acaeció el siniestro.

P_{t-h} total de primas del año t-h

q_{t-h} el porcentaje de siniestros sobre primas (P_t=h) - notificados en el año t y ocurridos en el t-h, es decir, con h años de diferimiento

En este caso tendremos : $\alpha_{t-i} = \sum_{j=1}^{\infty} q_{t-j}$

con la cual dicha reserva será:

$$X_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{t-i} \cdot P_{t-i}$$

Para el Seguro del Automóvil en Finlandia se estimaron los - siguientes coeficientes:

Para siniestros conocidos:

$$R_t = 0{,}18\ P_{t-1} - 0{,}07.P_{t-2} - 0{,}07.P_{t-3}$$

Para siniestros desconocidos:

$$X_t = 0{,}31.P_{t-1} - 0{,}06.P_{t-2}$$

Método del tiempo medio

Si t_i es el tiempo desde que ocurre el siniestro hasta su pago (medido en dias).

S_i el importe del siniestro pagado en t_i.

C el importe total de siniestros pagados por año.

P el total de primas recaudadas por año.

$\hat{C} = C/P$ el ratio calculado en base de estadísticas de varios años (aprovechando su estabilidad)

La reserva de siniestros pendientes es $= \frac{C}{365} \frac{\sum S_i t_i}{\sum S_i} = \frac{\hat{C}.P.\hat{t}}{365}$

Propiedades:

-- Sirve para siniestros conocidos y desconocidos.

-- Supone homogeneidad en la masa de siniestros.

-- La ponderación de $\hat{t}$ es necesaria ya que los siniestros de mayor cuantía tienen normalmente un tiempo más elevado de liquidación.

-- No son fáciles de tener en cuenta las variaciones estacionales en la cualidad de los siniestros.

Método "chain-ladder"

Examinemos primero el llamado "triangulo de siniestros", (run-off triangle):

año de origen	año de desarrollo (pago) 0	1	2	.	.	k
0	C_{oo}	C_{o1}	C_{o2}	.	.	C_{ok}
1	C_{1o}	C_{11}	C_{12}	.	.	
.	.	.	.			
.	.	.				
K	C_{ko}					

Donde C_{ij} es la cantidad pagada al final del año de desarrollo j respecto de los siniestros que tienen su origen en el año i, esto es, C_{ij} es la cantidad total pagada en el año de origen i y en los j siguientes.

La información que queda bajo este triángulo es desconocida, ya que representa el futuro desarrollo de los siniestros.

Consideremos el problema de estimar $C_{i\infty}$ para i=o,1,2,,k dado el anterior triángulo. Los diferentes métodos de resolver el problema se basan en la ausencia de influencias exógenas tales como la inflación, la distribución del diferimiento entre el incidente que da lugar a siniestro y el pago del siniestro permanece relativamente estable en el tiempo. En este caso las filas y columnas,son, aparte las fluctaciones aleatorias, proporcionales entre si. (109)

Un método basado en este supuesto y en el que las influencias exógenas son pequeñas, es el llamado "chain-ladder". De acuerdo con él, calcularemos los ratios:

$$\hat{M}_j = \left(\prod_{h=j}^{k-1} \hat{m}_h\right) \hat{M}_k$$

donde $\hat{M}_j$ es una estimación de $C_{i\infty}/C_{ij}$ y $\hat{m}_h$ una estimación de $C_{i,h-1}/C_{ih}$, que es calculada como:

$$\hat{m}_h = \sum_{i=0}^{k-i-1} C_{i,h+1} / \sum_{i=0}^{k-i-1} C_{ih}$$

$\hat{M}_k$ ha de ser calculado a partir de una estimación de los siniestros pendientes al final del año de desarrollo k, este es uno de los puntos más importantes.

Los factores $\hat{M}_j$ serán usados para calcular la reserva para siniestros pendientes, siendo esta respecto del año de origen i:

$$RSP = C_{i,k-i} \left(\hat{M}_{k-i} - 1\right)$$

Si el supuesto básico de este método, pequeñas influencias exógenas, no se cumple, entonces la conclusión de que las columnas del triángulo son proporcionales no es cierta y el método da resultados erróneos. Esta debilidad del modelo puede superarse si encontramos la variación con respecto a i de los ratios $C_{i,h-1}/C_{ih}$ para buscar las tendencias de estos ratios y proyectarlas. Esto tiene un inconveniente y es que si la tendencia es debido casi por completo a la inflación y si su tasa ha fluctuado en el pasado, no existirá una tendencia suave. Más aún, si se piensa que la tasa de inflación caerá en los proximos años, no es claro como la tendencia podría ser reflejada en la secuencia sobre i de los ratios C_{ih+1}/C_{ih}.

<u>El método de separación</u>

Sería, por lo tanto, preferible separar, si es posible, la distribución básica estacionaria de la dilación de recla maciones de las influencias exógenas que estan trastornando la estacionareidad.

Supongamos que, las condiciones que afectan a los tamaños de siniestros individuales permanecen constantes, entonces los ratios de la cantidad media de siniestros pagados en el año de desarrollo j por siniestro con año de origen i a la cantidad media pagada al final del año de desarrollo k por siniestro con año de origen i tendrían un valor esperado r_j que es estacionario, esto es, independiente de i.

Supongamos tambien que el costo de siniestros de un año de desarrollo es proporcional a algún indice relativo más al año de pago que al de origen. Esto es particularmente apropiado cuando el costo de los siniestros es dominado por altas tasas de inflación.

De acuerdo a los supuestos anteriores el costos esperado de siniestros del año de desarrollo j por siniestro con año de origen en i es $r_j \lambda_{i+j}$ donde λ_k es un índice exogeno; de los efectos de las influencias exógenas, del año de pago k. Esos valores esperados forman el siguiente triángulo de siniestros:

año de origen	año de desarrollo 0	1	2	.	.	k
0	$r_o\lambda_o$	$r_1\lambda_1$	$r_2\lambda_2$	.	.	$r_k\lambda_k$
:						
i	$r_o\lambda_1$	$r_1\lambda_2$	$r_2\lambda_3$	.	$r_{k-1}\lambda_k$	
•						
k	$r_o\lambda_k$					

Demonos cuenta que las cantidades de siniestros en el anterior triangule no son acumulativas respecto del año de - origen.

El problema es ahora, separar los valores $r_o, r_1, \ldots, r_k$ de $\lambda_o, \lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_k$, usando solo el correspondiente triengulo de valores observados

$$s_{ij} = (C_{i,j} - C_{i,j-1})/n_i$$

donde n_i es el número de siniestros con año de origen en i.

En la práctica el numero n_i no será conocido hasta el año en el que se complete su desarrollo. Por tauto será necesario tomar n_i como la suma de los siniestros conocidos y pendientes pero,¿en qué año de desarrollo?. Parece logico que éste fuera el último disponible. Pero,si como a menudo sucede, la compañia tiende a sobreestimar el número de siniestros pendientes en los primeros años de desarrollo, entondes, incluso si $\lambda_o = \lambda_1 = \ldots\ldots = \lambda_k$ el triangulo de - las s_{ij} tendera a incrmentarse cuando nos movemos en las columnas. El resultado sería una baja estimación de los λ y a partir de aqui, de la reserva para siniestros pendientes.

Entonces para asegurar la consistencia de las columnas del triángulo de las s_{ij}, parece necesario tomar n_i como el número de siniestros determinados en el año de desarrollo o más el número estimado de siniestros pendientes al final del año de desarrollo o (ambos respecto del año de origen i).

Una solución al problema de la separación puede ser la siguiente:

Por definición sabemos que $\sum_{j=0}^{k} r_j = 1$

si sumamos a lo largo de la diagonal que contiene ${}_k$, tendremos:

$$d_k = \lambda_k(r_0 + r_1 + \ldots\ldots + r_k) = \lambda_k$$

entonces nuestra estimación de λ_k es $\hat{\lambda}_k = d_k$.

Si sumamos la siguiente diagonal, el resultado es:

$$d_{k-1} = \lambda_{k-1}(r_0 + \ldots\ldots + r_{k-1}) = \lambda_{k-1}(1 - r_k)$$

entonces ${}_{k-1}$ podría ser estimado si conocieramos r_k. Pero - una estimación obvia es $\hat{r}_k = v_k/\hat{\lambda}_k$

donde v_k es la suma de la columna del triángulo que contiene r_k.

Luego $\hat{\lambda}_{k-1} = d_{k-1}/(1-\hat{r}_k)$

Este procedimiento puede ser repetido, llevándonos a una solución general:

$$\hat{\lambda}_h = d_h/(1 - \hat{r}_k - \hat{r}_{k-1} - \ldots - \hat{r}_{h+1})$$

$$\hat{r}_j = v_j/(\lambda_j + \hat{\lambda}_{j+1} + \hat{\lambda}_k)$$

donde d_h es la suma a lo largo de la diagonal h+1 y v_k es la suma hacia abajo de la h+1 fila.

Podemos ampliar el modelo introduciendo las influencias que hacen que el tamaño del siniestro varie tanto por el año de origen como por el de pago. En este caso el elemen ro (ij) del ultimo de los triángulos tendra la forma:

$$q_i r_j \lambda_{i+j}$$

donde las q_i estan normalizadas de forma que

$$\sum_{i=0}^{K} q_i = 1$$

Esto produce solamente dificultades de cálculo ya que disminuye el número de grados de liberta con respecto al modelo anterior.

II.7. SISTEMA DE TARIFAS

El objetivo del Sistema de Tarifas es el establecimiento del precio al que será ofrecido al público el servicio seguridad. Para ello ha de utilizar la siguiente información básica:

-- Información técnica, que nos proporcionará el modelo probabilístico del riesgo a asegurar.

-- Información interna, sobre los diferentes recargos a aplicar: recargos para gastos de gestión interna y para gastos de gestión externa.

-- Información económica. Mercado de seguros, precios de la competencia o, en su caso, precios fijados por la autoridad reguladora.

Hemos de considerar la interrelación existente entre el sistema de estabilidad y el de tarifas. El primero de ellos ha de proporcionar el valor del recargo de seguridad que cumple con el objetivo de estabilidad del mismo, no superar una probabilidad de ruina prefijada, en el conjunto del resto de sus elementos (reaseguro y reservas de estabilidad).

Por otra parte, la competencia del resto de las empresa puede hacer necesaria una adecuada reducción en las primas para mantener la cuota de mercado. La probabilidad de ruina puede no sobrepasarse con una modificación en la política de reaseguro, sin embargo, puede producirse un descenso importante de la rentabilidad de la empresa aseguradora. En este punto habría que estudiar las posibilidades que ofrece el sistema de inversiones para un incremento de los ingresos.

"La construcción de una tarifa es aquella actividad aseguradora en la cual la estructura total de tasas entre riesgos relacionados pero no idénticos es clasificada, comparada y racionalizada por ajustes posteriores". (110)

Podemos indicar dos razones para la construcción de una tarifa:

-- Proporcionar suavidad o forma funcional a la variación de las primas en relación a la variación de las características del riesgo.

-- Por razones de competencia, para confrontarla con la de otras compañías o la del conjunto del sector.

El primer problema con que nos enfrentaremos al construir una tarifa es el de seleccionar los factores de riesgo sobre los que se basa su estructura. Si estas variables no están dadas por la autoridad reguladora, su busca es bastante compleja, limitada por la imaginación del actuario y la capacidad económica de la empresa. Despues calcularemos la tarifa en función de las variables seleccionadas y según el modelo elegido.

Tambien ha de tenerse en cuenta la posibilidad de una revisión de las tasas para riesgos individuales. En el sistema Bonus-Malus un asegurado puede ser trasladado de una clase de la tarifa a otra en base a la pasada experiencia, por ejemplo, de los siniestros del año anterior como en el seguro de automóviles.

En relación con los sistemas Bonus-Malus, hemos de destacar algunos trabajos que versan sobre la conducta del asegu rado. Este no dará cuenta , o lo hará en menor cuantía de la real, de los siniestros que puedan afectar la cuantía de las primas futuras a pagar; su "hambre de bonus" le hará elegir aquella estrategia que sea en total la menos costosa. Este hecho a llevado al estudio de nuevos modelos que tengan en cuenta la conducta indicada. Podemos destacar los trabajos de Haehling von Lanzenauer y W.N. Lundberg (111); De Pril (112); Lemaire (113); y Norberg (114).

II.7.1. Formación de la prima comercial

Prima Pura y prima recargada.

Trabajando con bases de segundo orden la prima pura coincide con la esperanza matemática de la siniestralidad.

Teniendo en cuenta que una de las características de los seguros no-vida es que son , generalmente, operaciones a corto plazo, la prima pura será en base al principio de e-quivalencia:

$$P = E(X) = \int_0^\infty X \; dF(X,t)$$

Al sumar a esta prima el recargo de seguridad obtenemos la prima pura recargada o prima pura con recargo de seguridad explícito, es decir:

$$P_1 = P\ (1 + \lambda)$$

donde, como ya sabemos λ es el recargo de seguridad

Cuando tabajamos con bases de primer orden, entonces el recargo de seguridad vendrá dado en forma implicita, como ya indicamos las causas de este hecho pueden ser:

-- De tipo técnico: retreso en el desarrollo de la matemática de los seguros no-vida, debido a la dificultad de operar con bases de segundo ordena

-- De tipo económico: inadecuadas estructuras en el sector del seguro, política de precios uniformes, escasa vinculación en el desarrollo económico social, etc.

Prima de inventario y prima comercial.

En este punto comienzan las componentes económico-comerciales del precio del seguro

Tradicionalmente se viene distinguiendo entre:

-- Gastos de gestión interna g_i, que dependerán de la organización administrativa de la entidad aseguradora.

-- Gastos de gestión externa g_e, que estarán en función de la política comercial de la entidad.

Dentro de los gastos de gestión interna, como ya indicamos en el capítulo dedicado a las reservas de riesgos en curso, se viene distinguiendo entre los gastos de gestión interna de consumo inmediato y gastos de gestión interna de consumo diferido.

Por su parte I.C.E.A. propone la separación de los - costes administrativos de los costes comerciales, "superando la idea -y como alternativa- de la tradicional división entre gastos de gestión interna y gastos de gestión externa, que ademas no contienen las mismas partidas en todas las entidades. Haciendo esta separación sobre la base de una clasificación mínima de gastos por naturaleza. Los conceptos de gasto se clasificarán en su imputación entre administrativos o de gestión, comerciales y mixtos, siendo estos últimos los verdaderamente problemáticos para su reparto entre administración y comercial." (115)

En seguros generales se suelen imputar los gastos sobre la prima comercial.

A efectos de periodificación contable de los ingresos de primas (reservas de riesgos en curso) se define la Prima de Inventario:

$$P' = P(1 + \lambda) + g_i P'' = (1 - g_e) P''$$

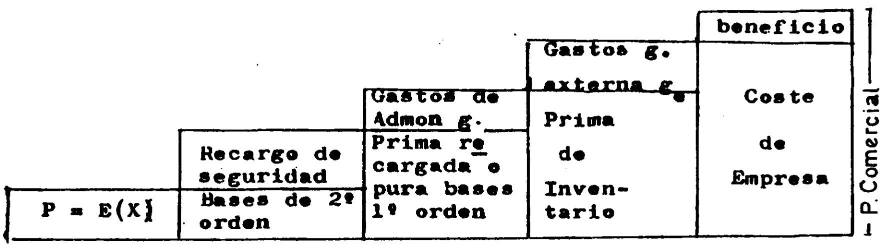
siendo P'' la llamada Prima Comercial que incluye tanto los gastos de gestión interna y externa

$$P'' = (1 + \lambda) P + g_i P'' + g_e P''$$

esto es

$$P'' = \frac{(1 + \lambda) P}{1 - g_i - g_e}$$

Gráficamente podemos expresar la estructura del coste del seguro en la siguiente manera:



El margen de beneficio no suele especificarse en forma explícita en las bases técnicas, lo cual hace suponer que el mismo figura implícito dentro de los restantes componentes del coste.

El recargo de seguridad parece el más apropiado.

II.72. Participación del asegurado en la garantía.

Se da en los siguientes casos:

1.- Seguro con franquicia absoluta.

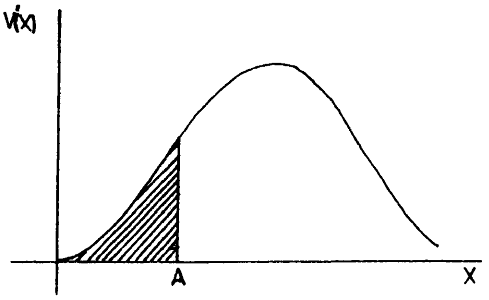
Siendo A la franquicia y X la cuantía del siniestro acaecido. Tendremos:

Ocurrido el siniestro, si

-- $x \leq A$ no se indemniza

-- $x > A$ se indemniza $X-A$

Suponiendo que la función de densidad de la distribución de la cuantía de un siniestro tuviera la representación de la siguiente figura, la incidencia en la misma de la franquicia vendría representada por el área rayada.



Si suponemos por otra parte que todo siniestro de cuantía $x \leq A$ se incluye en el cómputo correspondiente para el cálculo de $\bar{n}$, pero no en el de $\bar{c}$. La prima pura en este caso será:

$$P_1 = \bar{n}.\bar{c}_A$$

siendo

$$\bar{c}_A = \int_A^{\infty} (X-A)\ dV(X)$$

que es el coste por siniestro ocurrido.

2.- Seguro a primer riesgo.

En este caso, una vez fijado M:

-- Si $X < M$ se indemniza enteramente.

-- Si $X > M$ se indemniza sólo M

El costo medio en este caso será:

$$\bar{c}_2 = \int_0^{\infty} X \, d\,V(M) \quad + M \int_M^{\infty} d\,V(X) \quad = \int_0^{M} X \, d\,V(X) + M(1-V(M))$$

siendo la prima pura:

$$P_2 = \bar{n} . \bar{c}_2$$

3.- Seguro a primer riesgo y con franqucia.

Supone una combinación de los dos anteriores:

-- Si $X < A$ no se indemniza

-- Si $A < X < M$ se indemniza X-A

-- Si $X > M$ se indemniza M - A

El costo medio será:

$$\bar{c}_3 = \int_A^{M} (X - A) \, dV(X) \; - \; (M-A) \int_M^{\infty} dV(X)$$

siendo la prima pura:

$$P_3 = \bar{n} . \bar{c}_3$$

4.- Seguro con franquicia relativa

Se define de la siguiente forma:

-- Si $X < A$ no se indemniza nada

-- Si $X > A$ se indemniza X

El coste medio será:

$$\bar{c}_4 = \int_A^{\infty} X \, dV(X)$$

y la prima pura:

$$P_4 = \bar{n}. \bar{c}_4$$

Este tipo de franquicia no tiene gran aplicación práctica debido a la corruptela en la peritación del daño, es decir a forzar la valoración por encima de la franquicia para cobrarlo enteramente.

5.- Seguro con autoparticipación.

Siendo r la fraccion del daño a cargo de la compañía que cumple $0 < r < 1$.

Si acaece un siniestro de cuantía X, la compañía satisface r.X.

El coste medio será:

$$c_5 = \int_0^{\infty} r.X. \; V(X) = r.c$$

y la prima pura:

$$P_5 = n.c_5 = n.r.c = r.P$$

II.7.3. SISTEMAS DE TARIFICACION

Siguiendo al profesor Nieto de Alba podemos decir que el objeto de toda tarificación es "la obtención de primas - equitativas para cada riesgo sin olvidar el problema de la estabilidad. Los principios en que se basan la elaboración de una tarifa constituyen el sistema de tarificación." (116)

Podemos distinguir entre:

1.- Tarificación propiamente dicha (a priori -Depoid- o class rating en la literatura americana)

2.- Tarificación a posteriori: En esta segun prevalezca:

a) El principio de eficacia en la tarificación (consideración individual del riesgo) tendremos los sistemas Bonus-Malus, Merit-rating, Retrospective-rating etc.

b) El principio de eficacia y estabilidad (consideración de un colectivo o grupo) tendremos distribución de dividendos (premium refund), participación en beneficios.

II.7.3.1. Sistema de tarificación própiamente dicha.

En el presente sistema de tarificación la agrupación de riesgos en clases homogéneas se hace teniendo en cuenta los llamados factores de riesgo. La elección de dichos factores ha de realizarse con un criterio estadístico, es decir teniendo en cuenta que la media de daños sea distinta en cada clase y que la dispersión dentro de cada clase sea mínima

Los diversos tipos de primas se aplican uniformemente a cada unidad de expuesto al riesgo de acuerdo con el grupo o clase a que pertenezca dicha unidad. Estos grupos se elaboran de manera que sea posible obtener un conocimiento estadístico de su siniestralidad, de forma que se pueda comparar la siniestralidad media real de un grupo con la prima que le corresponde prima que será idéntica para todos los expuestos al riesgo que integran el citado grupo.

En resumen, hemos de buscar los factores que influyen en la prima y calcular la prima de acuerdo a los valores de éstos. La tarifa ha de cumplir dos principios generales: ha de ser todo lo correcta que sea posible en relación a los diferentes grupos de riesgo y ha de tener una estructura que permita un justo cálculo de la prima, siendo sencilla.

Ahora, siguiendo fundamentalmente un trabajo de Paavo Pitkänen (117) intentaremos establecer un modelo de tarifa.

Supongamos que la cantidad total de siniestros en un período de riesgo es una variable aleatoria Y. Para calcular la tarifa, tendremos que reunir una serie de variables x_1.. ..x_n que pueden tener una influencia sobre la cantidad de siniestros y pueden ser de naturaleza cualitativa o cuantitativa. Nos encontramos ahora, con dos problemas:

-- Un problema de selección: de este grupo de posibles variables, deberemos seleccionar las variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, que tienen una influencia significativa sobre la cantidad de siniestros Y. Representaremos estas variables por $x_1 \ldots x_k$ y las llamaremos variables de la tarifa. Tan pronto como esas variables han sido fijadas, podemos representar cada riesgo como un punto en el espacio k-dimensional $(x_1, \ldots, x_k)$.

La mayor dificultad es especificar qué es una influencia significativa.

-- El problema de la construcción de la tarifa: Calcularemos la prima como una función de las variables de la tarifa elegidas:

$$P = P(x_1,\dots\dots,x_n)$$

El orden lógico será: primero buscar los factores y luego construir la tarifa; nosotros lo estudiaremos al revés, aunque cuando busquemos los factores que influyen en la tarifa no haremos ningún supuesto en cuante a la estructura de la tarifa.

Supongamos que ya hemos resuelto nuestro problema de selección. Cada riesgo puede entonces ser expresado individualmente usando los valores de los factores de tarifa $x_1..x_k$ Entonces obtendremos $X= (x_1....x_k)$ como una combinación de aquellos valores.

Siguiendo a Buhlman podemos definir: (118)

-- La prima de riesgo $P(X)$ es la correspondiente al valor de la combinación de los factores y se define para cada valor de combinación separadamente.

-- La prima colectiva: en la práctica es difícil usar todos los k factores de la tarifa. Tambien si alguno de ellos puede tener gran número de valores diferentes, se suelen clasificar en algunas clases. Entonces algunos grupos de valores diferentes forman una clase (X_v), $v=1,2,..$ y los riesgos pertenecientes a esta clase tienen la misma prima a la que llamaremos prima colectiva. Toda prima de seguro suele ser en la práctica considerada prima colectiva, ya que no todos los factores de la tarifa pueden ser tenidos en cuenta como factores que influyen en la prima. La prima colectiva tambien dependerá de la distribución de los factores de la tarifa no considerados. Si la distribución de éstos factores cambia, la prima colectiva tambien deberá ser revisada.

El siguiente paso sería la adicción del correspondiente recargo de seguridad. En este punto nos remitimos al estudio realizado sobre el mismo en la presente tesis.

Cálculo de la prima con unos factores dados

Es normal tener una estructura de la tarifa lo más simple posible, de forma que la prima pueda ser facilmente calculada. Si suponemos que las variables de la tarifa estan dadas podremos usar los siguientes modelos para la construcción de la tarifa:

1.- Modelo aditivo:

$P(X) = K.\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i)$, donde K es una constante, por ejemplo el siniestro medio o la suma asegurada y las funciones - $f_i(x_i)$ representa la influencia de cada variable de la tarifa. De acuerdo con este modelo se supone que un cambio en una de las variables tambien causa un cierto cambio absoluto de la prima independientemente de los valores de las otras variables, esto es:

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij_i}$$

donde $E(Y)$ es el valor esperado de la siniestralidad total y α_{ij_i} representa la influencia de la clase j_i del factor i.

Este modelo indica que dos o más factores no interactúan influyendo en la prima. Podemos suponer entonces que un riesgo se compone de k pequeños riesgos que son independientes, las variables de la tarifa.

2.- Modelo multiplicativo:

$$P(X) = K.\prod_{i=1}^{k} f_i(x_i)$$

De acuerdo con el mismo, un cambio de una de las variables causa un cambio proporcional en la prima, independiente del valor de las otras variables, esto es:

$$E(Y) = \prod_{i=1}^{k} \alpha_{ij_i}$$

Un incremento en el riesgo causado por el cambio de valor de una variable influye en el reisgo total en la misma -- proporción

3.- Modelo mixto

$$P(X) = \sum_{i=1}^{k} f_{1i}(x_i) + \sum_{i\neq j} f_{2i}(x_i)f_{2j}(x_j) + \dots + \prod_{i=1}^{k} f_{ki}(x_i)$$

donde las funciones f_{ji} indica la influencia del factor i.

4.- Modelo general

$$P(X) = K.f(x_1,\dots,x_k)$$

En este modelo cada tarifa en el grupo de riesgo es calculada por separado. Este modelo presenta dificultades en la práctica, ya que la estructura de la tarifa se complica si existen varias variables de la tarifa.

Forzar la tarifa al modelo multiplicativo o sumativo supone una simplificación considerable. Si dos o mas variables tienen una fuerte interacción, deben ser unidas en una.

Construccion de la tarifa

Supongamos ahora que los valores de cada variable de la tarifa dada $x_1,\dots,x_k$ han sido clasificados en un número limitado de clases; asi denotaremos el riesgo $X=(i_1,\dots,i_k)$ si el valor de la variable x_j pertenece a la clase i_j.

Para el cálculo de la tarifa hemos de recoger los datos necesarios:

-- $y(i_1,\dots,i_k)$=cantidad observada de siniestros de los riesgos $(i_1,\dots,i_k)$.

-- $n(i_1,\dots,i_k)$= número observado de riesgos $(i_1,\dots,i_k)$ ponderados por el período de seguro.

-- $P(i_1,\dots,i_k)$= prima del riesgo $(i_1,\dots,i_k)$.

La cantidad media observada de los siniestros del riesgo $(i_1,\dots,i_k)$ es:

$$r(i_1,\dots,i_k)=\frac{y(i_1,\dots,i_k)}{n(i_1,\dots,i_k)}$$

Las funciones $f_i(x_i)$ o bien según el supuesto último - $f_{j_i}(x_i)$, puede ser encontrada usando los siguientes métodos:

1.- Método de los mínimos cuadrados

La función f es calculada de la siguiente ecuación:

$$\sum_{i_1,\dots,i_k} n(i_1,\dots,i_k)\ (r(i_1,\dots,i_k)-P(i_1,\dots,i_k))^2 = \text{mín.}$$

donde el sumatorio se extiende a todas las posibles combinaciones de las variables de la tarifa.

2.- Método del mínimo X^2.

Obtendremos las funciones f de forma que las primas ajuesten a los datos tanto como sea posible según el test de de la X^2. El criterio será entonces:

$$X^2 = \sum_{i_1,\dots,i_k} \frac{n(i_1,\dots,i_k)(r(i_1,\dots,i_k)-P(i_1,\dots,i_k))^2}{P(i_1,\dots,i_k)} = \text{mín}$$

3.- Método de la X^2 corregido

Ya que las ecuaciones anteriores son dificiles de resolver, el método puede ser modificado de forma que en lugar de la prima el denominador es cambiado por la cantidad media observada de los siniestros. El criterio será:

$$R = \sum_{i_1,\dots,i_k} \frac{n(i_1,\dots,i_k)(\acute{r}(i_1,\dots,i_k)-P(i_1,\dots,i_k))^2}{r(i_1,\dots i_k)} = \text{mín}$$

4.- Metodo de los momentos.

Este método requiere que cuando cada clase de cada variable de tarifa sea examinada separadamente, la cantidad de primas correspondiente a cada clase sea igual a su correspondiente cantidad observada de siniestros.

$$y_j^i = \sum_{\neq i} y(i_1,\dots i_{j-1},i,i_{j+1},\dots,i_k)$$

donde el sumatorio se extiende sobre todas las clases de combinaciones de todas las variables x_n $(n \neq j)$.

Entonces obtenemos el total de los siniestros de aquellos riesgos, donde el valor de la variable x_j pertenece a la clase i.

La fórmula será ahora:

$$u_j^i = \frac{\sum_{\neq i} n(i_1,\dots,i_{j-1},i,i_{j+1},\dots i_k).P(i_1,\dots,i_{j-1},i,i_{j-1}\cdot i_k)}{y_j^i} = 1$$

Este método nos da un grupo de ecuaciones si la estructura de la tarifa es multiplicativa.

Las ecuaciones derivadas de los anteriores métodos pueden ser resueltas de forma iterativa.

Cuando tratamos de investigar la idoneidad de las primas calculadas de acuerdo con los anteriores métodos, podemos fijar como criterio los valores de u_j^i. La cercania de esos valores a 1, el mejor modelo de acuerdo a este criterio. Puede ser probado que en el modelo sumativo, el método de los mínimos cuadrados da primas para las cuales $u_j^i = 1$ para todó i;j.

Podemos ver que cambiando los datos, modelos complicados pueden convertirse en simples. Por ejemplo es posible pasar del modelo multiplicativo al sumativo usando los logaritmos de las observaciones. De esta forma los totales y_j^i son perdidos y como consecuencia los valores u_j^i pueden diferir considerablemente de 1.

<u>El problema de la selección.</u>

Procederemos a examinar las formas en las que las variables de la tarifa pueden ser elegidas.

Si la estructura de la tarifa esta dada y los posibles variables de la tarifa son cuantitativas, pueden ser calculadas éstas usando el análisis de regresión.

Al mismo tiempo tambien es posible calcular la tarifa.

El hecho de que la estructura de la tarifa este dada, naturalmente influye la selección de las variables de tarifa Un procedimiento más correcto consistiría en seleccionar las variables de la tarifa sin ningún supuesto previo sobre la estructura de la tarifa. Nuestro deseo será encontrar el mejor modelo cuyos parámetros son elegidos como ya vimos.

Estudiemos primero el grado de influencia de las variables. Supongamos que los valores de cada posible variable de tarifa x_i $(i=1,\ldots,n)$ han sido clasificados en un número determinado de clases. Cada riesgo esta indicado por las clases $(i_1,\ldots,i_n)$ de las posibles variables de tarifa. Supondremos tambien que la media de la total cantidad de siniestros de cada riesgo (Y) es proporcional al período de seguro t. Esto es $E(Y) = \Pi(i_1,\ldots,i_n).t$
donde el parámetro $\Pi(i_1,\ldots,i_n)$ solo depende de los valores de las posibles variables de tarifa. En la práctica este supuesto no es muy exacto.

Usaremos las siguientes notaciones:

- $y(i_1,\ldots,i_n)$ siniestros observados sobre el riesgo - $(i_1,\ldots,i_n)$.

- $n(i_1,\ldots,i_n)$ el número observado de riesgos $(i_1\ldots,i_n)$ ponderados por el período del seguro.

- $y_j^a = \sum_{\neq i} y(i_1,\ldots,i_{j-1},a,i_{j+1},\ldots,i_n)$ el total de todos los siniestros de los riesgos donde el valor de la variable x_j pertenece a la clase a.

- n_j^a = número de los anteriores riegos ponderados por el período de seguro

Correspondientemente utilizaremos las siguientes notaciones:

- $y^{ab}_{jm} = \sum y(i_1,\ldots,i_{j-1},a,i_{j+1},\ldots,i_{m-1},b,i_{m-1},\ldots,n)$ el totalde los siniestros de los riesgos donde el valor de la variable x_j pertenece a la clase a y el valor de la variable x_m pertenece a la b.

- n^{ab}_{jm} = el número de los riesgos anteriores ponderados por el período de seguro.

Definiremos ahora:

$$\Pi = \frac{E(\sum_{i_1 \ldots i_n} y(i_1,\ldots\ldots,i_n))}{\sum_{i_1 \ldots i_n} n(i_1,\ldots.i_n)}$$

$$\Pi^a_j = \frac{E(y^a_j)}{n^a_j}$$

$$\Pi^{ab}_{jm} = \frac{E(y^{ab}_{jm})}{n^{ab}_{jm}}$$

Para la selección del procedimiento haremos la siguiente definición:

La variable x_j no tiene influencia de primer grado sobre la cantidad de siniestros si $\Pi^a_j = \Pi$ en todas las clases a de la variable x_j. Esto es, la variable x_j no tiene una influencia de primer grado sobre la cantidad de siniestros, si el ratio esperado de siniestros Π^a_j es igual al ratio esperado de siniestros de los datos totales Π en todas las clases de la variable x_j.

La variable x_m no tiene una influencia de segundo grado sobre la cantidad de siniestros cuando la variable x_i es seleccionada si $\Pi^{ab}_{jm} = \Pi$ en todas las clases a de la variable

x_j y en las clases b de la variable x_m.

Si la condición de esta definición es válida, elvalor de la variable x_j definé completamente el ratio esperado de siniestros Π^{ab}_{jm} y el valor de la variable x_m información adiccional sobre la cantidad de siniestros.

Procediendo de esta forma nosotros la definición general siguiente:

La variable x_m no tiene una influencia de i-esimo grado sobre la cantidad de siniestros cuando las variables $x_{(1)}$ $\ldots\ldots, x_{(i-1)}$ son seleccionadas si

$$\Pi^{a_{(1)},\ldots\ldots,a_{(m)}}_{(1),\ldots\ldots\ldots(i-1),m} = \Pi^{a_{(1)},\ldots\ldots,a_{(i-1)}}_{(1),\ldots\ldots,(i-1)}$$

en todas las clases

$$a_{(1)},\ldots\ldots,a_{(i-1)},a_m \text{ de las variables } x_{(1)},\ldots x_{(i-1)} x_m$$

Entonces el ratio esperado de siniestros en las clases de las variables $x_{(1)},\ldots\ldots,x_{(i-1)},x_m$ depende solo de las variables $x_{(1)},\ldots\ldots x_{(i-1)}$.

Supongamos que la dependencia del ratio esperado de siniestros $\Pi(i_1,\ldots,i_n)$ sobre las variables de tarifa es conocia y total y que deseamos ordenar las variables de acuerdo a su influencia. Supongamos que tenemos seleccionadas (i-1) variables sobre la base de la intensidad de su influencia Cuando seleccionamos la siguiente variable, naturalmente dejamos fuera aquellas que no tienen la influencia de grado i-esimo, cuando las (i-1) previamente seleccionadas variables están dadas. Esto no sig nifica que una variable de esta cla s-e no tenga influencia sobre el ratio esperado de siniestros, si no que su selección no hace mas acurado el ratio esperado de siniestros.

Veamos ahora como realizaremos la selección de las variables:

Las variables serán seleccionadas una por una. En cada selección la influencia de las variables previamente seleccionadas sobre el ratio de siniestros es tenida en cuenta. El problema más difícil es medir lo sigunificativo de la influencia de las diferentes variables.

Seleccionemos la primera variable: en el caso en el que la variable x_j no tiene influencia de primer grado sobre el ratio esperado de siniestros, la ecuación $\Pi_j^a = \Pi$ es cierta en todas las clases a de la variable x_j. Sobre la base de los datos trataremos de investigar que variable difiere más de esta hipótesis.

Consecuentemente fijaremos un test donde la hipótesis nula es $H_o : \Pi_j^a = \Pi$ en todas las clases a de la variable x_j

Siendo:

$$x_j^2 = C \sum_{a} \frac{n_j^a \left[\dfrac{y_j^a}{n_j^a} - \dfrac{\sum_{i_1 \ldots i_n} y(i_1, \ldots, i_n)}{\sum_{i_1 \ldots i_n} n(i_1, \ldots, i_n)} \right]^2}{\dfrac{\sum_{i_1 \ldots i_n} y(i_1, \ldots, i_n)}{\sum_{i_1 \ldots i_n} n(i_1, \ldots, i_n)}}$$

donde el sumatorio se extiende sobre las clases de la variable x_j.

Hemos supuesto que la varianza del ratio observado de siniestros es aproximadamente $(1/C.n_j^a)$xel ratio de siniestros esperado.

Si la hipótesis nula es cierta, la variable test se distribuye aproximadamente como una X^2 con I_j-1 grados de libertad, donde I_j es el número de clases de la variable x_j.

La medida de lo significativo de la influencia de la variable x_j la da el valor de la variable test.

Consecuentemente, la variable de tarifa es seleccionada como la primera, porque

$$F(X_j^2) = P(X^2 \leq X^2) = \max_j.$$

la variable seleccionada sera denotada $x_{(1)}$.

Seleccionemos la segunda variable:

Si la variable x_j no tiene una influencia de segundo grado, cuando $x_{(1)}$ ha sido seleccionada, $\Pi^{ab}_{(1)j} = \Pi^{a}_{(1)}$ en todas las clases de las varialbes $x_{(1)}$ y x_j.

Como en el caso anterior, establezcamos lashipótesis nula: H_o: $\Pi^{ab}_{(1)j} = \Pi^{a}_{(1)}$ en todas las clases de las variables $x_{(1)}$ y x_j.

La variable test es en este caso:

$$X^2 = C\sum_{i,j} \frac{n^{ab}_{(1)j}\left[\frac{y^{ab}_{(1)j}}{n^{ab}_{(1)j}} - \frac{y^{a}_{(1)}}{n^{a}_{(1)}}\right]^2}{\frac{y^{a}_{(1)}}{n^{a}_{(1)}}}$$

Si la hipótesis nula es cierta, la variable test es aproximadamente distribuida como una X^2 con $I_{(1)}.(I_k-1)$ grados de libertad.

La medida de lo significativo de la influencia de la variable x_j es el valor de esta variable test.

Entonces la variable es seleccionada como la segunda porque

$$v(x_j/x_{(1)}) = F(X^2) = P(X^2 \leq X^2) = \max_j$$

donde $v(x_j/x_{(1)})$ describe la influencia de la variable x_j cuando $x_{(1)}$ esta dada.

La variable seleccionada es denotada por $x_{(2)}$.

De igual forma seleccionariamos $x_{(3)}$, $x_{(4)}$.....

Generalicemos en la elección de la variable p-esima. En este momento tendremos p-1 varialbes seleccionadas. Para poder seleccionar la siguiente variable tnemos que fijar la hipótesis nula para cada restante posible variable x_j:

$$H_o: \ \Pi^{ab......gh}_{(1)(2)....(p-1)j} = \Pi^{ab......g}_{(1)(2)...(p-1)}$$

La variable test es en este caso

$$X_j^2 = C \sum_{a,b,...g,h.} \frac{n^{a..gh}_{(1).(p-1)j} \left| \dfrac{y^{a.....gh}_{(1).....(p-1)j}}{n^{a......gh}_{(1)...(p-1)j}} - \dfrac{y^{a......g}_{(1)...(p-1)}}{n^{a.....g}_{(1)...(p-1)}} \right|^2}{\dfrac{y^{a....g}_{(1)...(p-1)}}{n^{a....g}_{(1)...(p-1)}}}$$

donde el sumatorio se extiende sobre todos los paréntesis indicados por las variables $x_{(1)}.......x_{(p-1)}$

La distribución de la variable test será aproximadamente X^2, siendo el número de grados de libertad el de las posi bles combinaciones de las clases de $x_{(1)}\ldots x_{(p-1)}, x_j$ menos el número de posibles combinaciones de las clases de la variables $x_{(1)},\ldots\ldots,x_{(p-1)}$.

La siguiente variable seleccionada es aquella para la cual:

$$v(x_j \ / \ x_{(1)},\ldots\ldots,x_{(p-1)}) = F(X^2) = P(X^2 \leq X^2) = \max_j.$$

El numero de variables puede ser decidido por adelantado. Otra forma de limitar el numero de variables consiste en fijar una constante E por adelantado de forma que la selección parará cuando

$$\max_j F(X_j^2) \leq E$$

Si han de ser seleccionadas bastantes variables, el número de combinaciones a manejar crecerá considerablemente;

En este caso el método de selección puede cambiarse de forma que despues de tres pasos de selección se continúa de acuerdo al criterio:

$$\text{mín } v(x_j \ / x_{(1)}, x_{(2)}) = \text{máx}.$$

donde $x_{(1)}$ y $x_{(2)}$ ya han sido seleccionadas.

Pasemos a construir una tarifa: las variables elegidas son puestas en el mejor orden $x_{(1)},\ldots\ldots,x_{(k)}$ y las n-k variables restantes pueden ser ignoradas.

Como dijimos antes, los modelos más comunes de tarifa son multiplicativos o sumativos. Decidir cual de ellos se ajusta más al problema en cuestion o quzás si ambos no son apropiados es a menudo difícil. El mejor procedimiento es considerar el problema en forma amplia, permitiendo la existencia de ambos modelos. De esta forma obtendremos uno que incluye parte de cada uno.

Una posible tarifa puede ser la siguiente:

-- Primer paso: la tarifa en la clase a de la variable $x_{(1)}$ es

$$f_1 = \alpha^{a}_{(1)} = \frac{y^{a}_{(1)}}{n^{a}_{(1)}}.$$

-- Segundo paso: supongamos que en la clase (a,b) de la variables $x_{(1)}$ y $x_{(2)}$ la tarifa es

$$f_2 = \alpha^{b}_{(2)}\ \alpha^{a}_{(1)} + \beta^{b}_{(2)}$$

donde $\alpha^{a}_{(1)}$ ha sido obtenido en el primer paso.

Así, nosotros tenemos el modelo de regresión de una variable independiente donde el ratio de siniestralidad en la clase (a,b) es la variable dependiente y la tarifa que es un resultado del paso anterior es la variable independiente. Los parámetros $\alpha^{b}_{(2)}$ y $\beta^{b}_{(2)}$ puede ser fijado para para clase de la variable $x_{(2)}$ usando el método de los mínimos cuadrados:

$$\sum_{a} n^{ab}_{(1)(2)} \left[\frac{y^{ab}_{(1)(2)}}{n^{ab}_{(1)(2)}} - \left(\alpha^{b}_{(2)}\ \alpha^{a}_{(1)} + \beta^{b}_{(2)}\right)\right]^2 = \min_{\alpha^{b}_{(2)},\,\beta^{b}_{(2)}}$$

siendo el sumatorio sobre todas las clases de la variable $x_{(1)}$

Un paso general sería

Pado v: supongamos que la tarifa tiene el siguiente modelo:

$$f_v = \alpha_{(v)}\, f_{v-1} + \beta_{(v)}$$

donde f_{v-1} es la tarifa fijada en un paso anterior para las clases fijadas por las variables $x_{(1)} \ldots\ldots x_{(p-1)}$.

Para cada clase de la variable $x_{(v)}$, los parametros $c_{(v)}$ y $_{(v)}$ pueden calcularse usando el método de los mínimos cuadrados:

$$n^{ab\ldots\ldots}_{(1)(2)\ldots(v)} \left[\frac{y^{ab\ldots\ldots}_{(1)\ldots(v)}}{n^{ab\ldots\ldots}_{(1)(\ldots(v)}} - (c_{(v)} f_{v-1} + \beta_{(v)}) \right]^2 = \min$$

La ventaja de este método es el hecho de que no esta fuertemente atado al modelo, ya que combina en él el multiplicativo y el sumativo. La tarifa final será:

$$f_k = \alpha_{(k)}\, \alpha_{(k-1)} \cdots\cdots \alpha_{(1)} + \alpha_{(k)}\, \alpha_{(k-1)} \cdots\cdots \alpha_{(3)} + \beta_{(2)} + \alpha_{(k)}\, \alpha_{(k-1)} \cdots\cdots \alpha_{(4)} \beta_{(3)} + \ldots =$$

$$= \prod_{(i)=1}^{(k)} \alpha_{(i)} + \sum_{(j)=2}^{k-1} \beta_{(j)} \prod_{(j+1)}^{(k)} \alpha_{(i)} + \beta_{(k)}$$

Si (k) =3 la tarifa será:

$$f_3 = \alpha_{(3)}\alpha_{(2)}\alpha_{(1)} + \alpha_{(3)}\beta_{(2)} + \beta_{(3)}$$

$$= \alpha_{(3)}\left[\alpha_{(2)}\alpha_{(1)} + \beta_{(2)}\right] + \beta_{(3)}$$

y la tarifa es facil de poner en forma de tabla.

Si (k) = 4, la tarifa será

$$f_4 = \alpha_{(4)}\alpha_{(3)}\alpha_{(2)}\alpha_{(1)} + \alpha_{(4)}\alpha_{(1)}\beta_{(2)} + \alpha_{(4)}\beta_{(3)} + \beta_{(4)}$$

que en esta forma es más difícil de poner en forma tabular, sin embargo cambiando la tarifa a la forma

$$f_4 = \alpha_{(4)}\ \alpha_{(3)}\ \left(\left(\alpha_{(2)}\alpha_{(1)} + \beta_{(2)} + \left(\frac{\beta_{(3)}}{\alpha_{(3)}} + \frac{\beta_{(4)}}{\alpha_{(4)}\alpha_{(3)}}\right)\right)\right)$$

llegamos a la conclusión de que la tarifa puede ser calculada usando dos tabias bidimensionales.

II.7.3.2. Sistema bonus-malus

Este sistema de tarificación presenta el siguiente esquema:

Consideremos una de las clases homogéneas en las que hemos dividido la cartera total. Supongamos por ejemplo que la distribución del número de siniestros en $(0,t)$ dentro de dicha clase es binomial negativa. Esto es

$$P_n(t) = \binom{-mh}{n}\left(\frac{-t}{t+h}\right)^n\left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh}$$

donde, como ya indicamos al efectuar su estudio:

- t es el periodo de observación
- h es el coeficiente de heterogeneidad de la clase.
- la media es m.t
- la varianza es mt (1 + t/h)

Si suponemos que dicha distribución es generada por la distribución de Poisson compuestta, esto es:

$$P_n(t) = \int_0^{\infty} P(n/tx)\ dU(x)$$

donde $P_n(n/tx)$ es la distribución de Poisson simple:

$$P_n(n/tx) = \frac{(tx)^n\ e^{-tx}}{n!}$$

siendo:

- t.x la media de siniestros en el período t
- x la variable cuya función de distribución U(x) nos traduce la heterogeneidad con la que se distribuye x entre los -

distintos grupos de la clase considerada y a la que se denomina función de estructura de los grupos homogeneos..

Suponemos que dicha distribución U(x) es del tipo III de Pearson, es decir:

$$U'(x) = \frac{h^{mh}}{\Gamma(mh)} \quad x^{mh-1} \; e^{-hx} \qquad x>0$$

por lo tanto

$$P_n(t) = \int \frac{(tx)^n}{n!} \; e^{-tx} \; \frac{h^{mh}}{\Gamma(mh)} \quad x^{mh-1} \; e^{-hx} \; dx \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \binom{-mh}{n} \left(\frac{-t}{t+h}\right)^n \left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh}$$

como ya demostramos en su momento.

Consideremos que transcurridos t años todas las pólizas que han tenido n siniestros constituyen una subclase de la -- clase considerada.Partiendo de esta situación nos interesará hallar la distribución a posteriori g(tx/n) para hallar su media E(tx/n) y ajustar la prima para que esa subclase con a-- rreglo a la siniestralidad observada en la misma.

Mediante la fórmula de Bayes, obenemos la siguiente distribución a posteriori

$$g(tx/n) = \frac{U'(x) \, . \, P(n/tx)}{P_n(t)}$$

sustituyendo en la anterior expresión las distribuciones indicadas obtendremos la siguiente:

$$g(tx/n) = \frac{\frac{h^{mh}}{\rho(mh)} \quad x^{mh-1} \; e^{-hx} \quad \frac{(tx)^n}{n!} \; e^{-tx}}{\binom{-mh}{n}\left(\frac{-t}{t+h}\right)^n\left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh}}$$

$$= \frac{(t+h)^{mh+n}}{\rho(n+mh)} \quad x^{n+mh-1} \quad e^{-x(t+h)}$$

que es tambien del tipo III de Pearson.

La media a posteriori es:

$$E(tx/n) = \frac{n+mh}{t+h} = m\cdot\left(\frac{h + n/m}{t+h}\right) = mK(t,n,h)$$

El esquema de este proceso es el siguiente:

	Función	Media	Varianza
Dist.a priori	$U(x) = \frac{h^{mh}}{\rho(mh)} \, x^{mh-1} e^{-hx}$	m	m/h
F.verosimilitud	$P(n/tx) = \frac{(tx)^n}{n!} \, e^{-tx}$	$t.x$	$t.x$
D.a posteriori.	$g(tx/n) = \frac{\frac{h^{mh}}{\rho(mh)} x^{mh-1} e^{-hx} \frac{(tx)^n}{n!} e^{-tx}}{\binom{-mh}{n}\left(\frac{-t}{t+h}\right)^n\left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh}}$	$m\left(\frac{h+n/m}{t+h}\right)$	$\frac{mh+n}{(t+h)^2}$

Las conclusiones actuariales de $E(tx/n) = mK(t,n,h)$ son:

-- m es la media de siniestros de una clase B

-- $E(tx/n)$ es la media de siniestros en una subclase $B_1 \subset B$ formada por aquellas pólizas que han sido objeto de n siniestros durante el tiempo $(0,t)$.

-- h traduce la heterogeneidad de la clase B

-- K es el elemento que va rectificando la prima a priori y que depende además de h, del número de siniestros n y del tiempo transcurrido t.

Analicemos las posibles carteras:

1.- Cartera homogenea

Cuando $h \rightarrow \infty$ la cartera B será homogenea (la binomial negativa tenderá a la de Poisson) y no estaría justificado el bonus-malus, pues tendremos:

$$E(tx/n) = m \left(\frac{h + n/m}{t+h}\right) \longrightarrow m$$

para cualquier t, años transcurridos, y cualquier n, número de siniestros ocurridos.

2.- Cartera heterogenea

Cuando $h \rightarrow 0$ la clase será muy heterogenea y la media de la subcartera B será:

$$E(tx/n) = m \left(\frac{h + n/m}{t+h}\right) \longrightarrow \frac{n}{t}$$

es decir que no depende de la media m de la clase. En este caso procede tarificar con arreglo a experiencia propia de la citada subcartera B_1.

II.7.3.3. Otros sistemas de tarificación

Entre otros sistemas de tarificación a posteriori, podemos señalar siguiendo al profesor Vegas Asensio (119):

-- Special rating: cosnsite basicamente en una serie de descuentos sobre la tarifa, ajustada por clases o categorías (class-rating), normalmente a los asegurados que reúnen ciertos requisitos que determina una probabilidad de ocurrencia del siniestro. Tambien toma la forma de reparto de dividendos al final del período de cobertura. Una tarificación especial-rating la efectua una entidad que tenga una adecuada selección de riesgos de forma que la reducción de la siniestralidad le permita una baja paralela en la prima con el consiguiente reclamo comercial para los posibles asegurados.

Tambien puede suponer cun recargo en la prima cuando el riesgo sea agravado.

-- Schedule-rating: O plan de tarificación cuya mayor aplicación en varios paises anglosajones se dá en el ramo de incendios, donde cada edificio individual tiene su propia prima. La estructura del inmueble (materiales de construcción situación de riesgo, extintores, y salidas de urgencia,etc.) influyen decisivamente en el tiempo de prima de acuerdo con un plan elaborado por el asegurador. Tambien se dá este sistema con frecuencia en el seguro de robo para aquellos asegurados con dispositivos de seguridad eficientes,etc.

-- Merit-rating: el cual tiene la máxima aplicación en el seguro del automóvil (como puede ser, por ejemplo, el bonus-malus) ya que la prima de cada póliza se va rectificando en función de la propia propensión al siniestro del asegurado, por los que se diferencia del schedule-rating en que en este la prima se reduce por causas apriorísticas, mientras que en el merit-rating la prima disminuye o aumenta por motivos a posteriori, es decir, obserbando la conducta del asegurado durante el período de cobertura. Es pues fundamental en este caso que el comportamiento del asegurado influya decisivamente en el acaecimiento de la siniestralidad y supone pues un estímulo para prevenir un siniestro. Tambien se aplica este sistema de tarificación a los ramos de accidentes de trabajo, responsabilidad civil etc.

-- Retrospective-rating: en contraste con los anteriores métodos de tarificación en donde la corrección de primas se hace con vistas al futuro de la póliza, el retrospective-rating permite un ajuste para el período que finaliza en este momento. La prima se determina parcial o totalmente por la siniestralidad real del asegurado durante el período de cobertura y el contrato es renegociado nuevamente.

Normalmente se aplica en el ramo de accidentes de trabajo; por ejemplo las Compañías aseguradoras Americanas suelen emplear la siguiente fórmula:

$$Pr = (P_b - (S)(f)).1$$

siendo:

Pr la prima retrospectiva pagadera para el año en cuestión.

Pb la prima base destinada a cubrir los gastos fijos del asegurado (administración y producción)

S la siniestralidad real sufrida por el colectivo de trabajadores asegurados.

f un factor de conversión destinado a cubrir los costes variables del asegurador (dependientes del número de siniestos).

1 los impuestos y recargos.

De esta forma cuanto mayor sea el colectivo asegurado menor es el riesgo asociado al uso de este sistema desde el punto de vista del patrono asegurado.

III.

MODELOS GLOBALES DE LA EMPRESA ASEGURADORA

III.1 LA TEORIA DEL RIESGO COLECTIVO.

Es el primer modelo que ha analizado el efecto de las fluctuaciones aleatorias sobre el negocio de riesgo de la compañía aseguradora como un todo.

Los primeros estudios fueron realizados a comienzos del presente siglo por Filip Lundberg y desarrollado por diferentes autores como Cramer, Segerdahl, Esscher, Ammeter, Philipson y en general por la Escuela Escandinava de actuarios.

La Teoría del Riesgo Colectivo ha tenido una amplia aceptación, habiendo sido desarrollada su base teórica aunque continuan sin resolverse algunos problemas que plantean los diferentes cálculos a realizar.

En el presente trabajo se ha realizado su estudio y sus aplicaciones en el cálculo de los elementos del sistema de estabilidad. Ahora nos proponemos un examen de su posible utilidad como un primer modelo para la toma de decisiones en la entidad aseguradora.

Para ello supongamos que la siniestralidad total ξ_T es reducida por un contrato de reaseguro a ξ. La función de distribución de esta última variable aleatoria es F(x) (consideraremos a efectos de simplicidad un período anual, aunque no existiría una gran dificultad en su ampliación), la prima recargada sera $(1 + \lambda).P$.

A continuación plantearemos una serie de posibles objetivos para la empresa de seguros, estudiando su consecución en el marco de la Teoría del Riesgo Colectivo (120):

1.- Conseguir que la probabilidad de ruina no exceda ε.

Si el capital inicial de la compañía es S, lo conseguiremos mediante un contrato de reaseguro de forma que:

$$F(S + (1 + \lambda) P) \geq 1 - \mathcal{E}$$

Una posible modificación del objetivo consiste en el intento de minimizar la probabilidad de ruina. Esto nos llevaría a un contrato stop-loss del 100% que nos proporcionaría una probabilidad de ruina cero, convirtiendose la compañía aseguradora en un simple intermediario, ya que no se presta atención a otros factores importantes como el costo neto de reaseguro. Hemos de introducir otros elementos para obtener una adecuada política de dirección.

2.- Maximizar la ganancia esperada.- Si no existe un reaseguro utilizable con una prima de reaseguro menor que el valor esperado del riesgo del reasegurador la compañía retendrá ξ_T. Este criterio no presta atención a la probabilidad de ruina, siendo extremadamente peligroso. Hemos de preguntarnos si el valor esperado del beneficio es una medida racional de la rentabilidad del negocio.

Transcurrido un año, la compañía tendrá un capital $\zeta = (1+\lambda)P + S - \xi$, siendo la distribución de probabilidad de esta variable aleatoria $G(z) = 1 - F(S + (1+\lambda).P - z)$.

Ahora bien, si la dirección actua en forma racional ponderará las diferentes alternativas de forma no puramente matemática sino teniendo en cuenta los diferentes deseos y necesidades más o menos subjetivamente. En este momento introduciremos el concepto de utilidad, siendo U(z) una función que nos describe y mide numéricamente el grado en que es deseable el resultado de alguna operación económica, en nuestro caso z.

De una actuación racional esperaremos que la compañía desee maximizar el valor esperado de la utilidad de en lugar del valor esperado de la ganancia. En otras palabras, la compañía elegirá la alternativa de reaseguro que maximice:

$$U(G) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(z)\, dG(z)$$

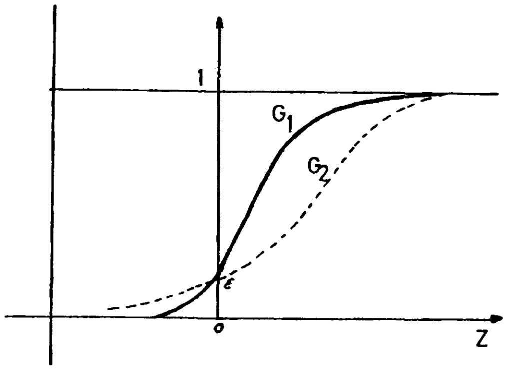
que es la utilidad de la distribución G(z). Esto nos lleva a:

3.- Maximizar el valor esperado de la utilidad.- En una formulación genral, la compañía podría fijar una utilidad mucho más pqueña para valores negativos de z que para los positivos de acuerdo con lo dañino que considere la posible ruina.

Sin embargo este criterio no tiene en cuenta que la probabilidad de ruina no debe ser excesiva.

4.- Maximizar el valor esperado de la utilidad de la ganancia sin superar una probabilidad de ruina ε.- Los problemas matemáticos asociados al concepto general de utilidad dependen de la fomma de la función de utilidad. Si ésta es, por ejemplo, polinomial el problema consistirá en maximizar una combinación lineal de algunos momentos de la variable .

Existe aun un defecto en este criterio que ha de ser eliminado a menos que la función de utilidad esté apropiadamente elegida. Supongamos que la compañía desea maximizar una utilidad lineal, esto es , su ganancia. Según este criterio la elección de reaseguro ha de realizarse entre aquellos contratos para los cuales la probabilidad de ruina G(0) sea menor o igual que ε . Si observamos la figura de la gráfica siguiente consideramos dos funciones:



Claramente la función G_1 lleva a una mayor esperanza de beneficio que G_2. A pesar de esto es natural seleccionar la alternativa G_2, ya que ambas funciones tienen la misma probabilidad de ruina y G_2 da un mayor beneficio medio con la condición de que no exista la ruina. En otras palabras, si la ruina se da, no tiene niguún interés desde el punto de vista de la compañía el que la pérdida sea grande o pequeña, esto si la ruina supone la liquidación de la compañía, claro está. Asi pues, parece más realista usar un valor esperado condicional en lugar del valor esperado y poner los requerimientos en la forma:

$$\text{máx} \int_0^{\infty} z dG(z)/(1 - G(0)) \quad \text{con la condición } G(0) \leq \varepsilon$$

usando una utilidad genérica tendremos:

$$\text{máx} \int_0^{\infty} U(z)\; dG(z)/(1 - G(0)) \quad \text{con la condición } G(0) \leq \varepsilon$$

Estos criterios pueden ser mejorados teniendo en cuenta lo dañino de la ruina. Para este propósito la definición de la función de utilidad ha de ser modificada dándole el valor apropiado U(0-) en cero, elegido para indicar la "utilidad" de la ruina. De aquí se sigue un nuevo criterio:

$$\text{máx. } G(0)U(0-) + \int_0^\infty U(z)\, dG(z) \text{ con la condición } G(0)$$

que podemos expresar como:

5.- La probabilidad de ruina no debe exceder un valor ε y al mismo tiempo, el valor esperado de la utilidad, sujeto a la condición $U(z) = U(0-)$ para $z < 0$ debe ser maximizado.

Este criterio es una síntesis de las anteriores y tiene en cuenta los diferentes aspectos de la Teoría del Riesgo en forma racional. Podríamos considerar un período T de varios años consecutivos. Daremos algunas reglas que nos muestran como puede ser controlado el negocio asegurador según las diferentes situaciones en que nos encontremos durante el período T. Tendremos diferentes estrategias "Z". En nuestro caso serán al menos:

-- El recargo de seguridad λ, definido como una función de la ganancia acumulada. Una expresión apropiada para la función en cuestión y sus parámetros será encontrada, por ejemplo, experimentando con diferentes valores supuestos de forma que puedan ser obtenidas las propiedades óptimas que definiremos en el siguiente criterio. La función será de tal forma que disminuya λ si la ganancia se incrementa fuertemente y se incremente λ si el beneficio acumulado disminuye a un nivel en el que se considere crítico el estado de la compañía.

Es discutible lo realista de un modelo que permite variar λ de acuerdo con la política de la compañía. Hemos de ad mitir que debido a la competencia y otras circunstancias de - mercado la posibilidad de hacerlo se encuentra restringida.

Sin embargo, puede ser admitido en ciertas situaciones por ejemplo, una disminución de puede ser debido a la utilización de "bonus" que disminuyen la tarifa, por un incremento de los gastos de promoción etc.

-- La retención neta máxima y el reaseguro en general pueden tambien ser establecidos como una función de la ganancia acumulada. Si ésta se incrementa la retención neta podrá serlo tambien de acuerdo a determinada forumula.

El siguiente paso será establecer un criterio dinámico:

6.- Encontrar la estrategia Z que maximiza la función de utilidad durante un período T con la condición G(0) .

En este caso las decisiones sobre los elementos considerados anteriormente se encuadrarán en una secuencia de decisiones. Cada período anual tomaremos una decisión sobre los mismos de forma que el conjunto de las decisiones tomadas nos conduzca a la consecución de los objetivos fijados, en nuestro caso mantener la probabilidad de ruina por debajo de un cierto nivel.

En lo que sigue presentaremos dos modelos basados en el anterior criterio. Ambos se fundamentan en la Teoría del Riesgo Colectivo, aunque introducen ciertas modificaciones para conseguir una representación más realista del sistema asegurador.

III.2. EL PROBLEMA DE LOS DIVIDENDOS. MODELO DE FINETTI-BORCH.

La Teoría del Riesgo Colectivo presenta dos importantes limitaciones en cuanto a su aplicación para el establecimiento de un modelo global de la empresa aseguradora:

1.- Se refiere unicamente al sistema de estabilidad de la entidad,considerando solamente la actividad aseguradora propiamente dicha.

2.- Su falta de realismo. Varios han sido los autores que han puesto de manifiesto este hecho: la T.R.C supone una acumulación ilimitada de reservas que contrasta con la realidad económica del reparto de dividendos.

Fijándonos en este punto, fue Bruno De Finetti uno de los primeros autores que planteó el llamado problema de los dividendos (121). Para él la T.R.C es irrealizable ya que supone que no existe un límite para los fondos de reserva que pueden acumularse en una entidad aseguradora. Si se establece en la práctica que dichas reservas no han de exceder un nivel máximo predeterminado, el modelo considerado en la T.R.C. sufre un cambio importante: la probabilidad de ruina para un período que se incrementa indefinidamente, tiende a la unidad. Se pueden, sin embargo, establecer reglas de procedimiento,basadas en el concepto de larga duración promedio de la empresa hasta el déficit o en el valor actual de futuras ganancias.

Varios han sido los estudios realizados en esta linea destacando los realizados por el profesor Karl Borch (122), que al introducir los dividendos plantea un problema de decisión secuencial. El modelo es el siguiente:

Un asegurado que contrata un seguro deseará conocer - si la compañía será capaz de cumplir sus obligaciones contractuales. Para esto la compañía además de sus reservas técnicas habrá de poseer un "Fondo de solvencia" como ya hemos indicado en repetidas ocasiones; éste se nutrirá del recargo de seguridad incluido en las primas y es lógico esperar el crecimiento del citado fondo a lo largo del tiempo.

En la práctica las compañías de seguros pagarán dividendos cuando dicho fondo sea mayor que lo que se estima como necesario. El problema que se plantea es determinar esta - cuantía.

Supongamos que al final de un período una empresa aseguradora se encuentra con un fonde S y considera la posibilidad de pagar una cantidad s como dividendos. La cantidad no distribuida como dividendos será mantenida como reserva durante el siguiente período asegurador. El fin de la misma es posibilitar a la compañía hacer frente a las contingencias de próximos períodos y salvaguardar los futuros pagos de dividendos. En este caso el problema estará en determinar s cuando S está dado. Esto significa que la compañía debe equilibrar el deseo de pagar grandes dividendos en el momento actual con el de -- hacer posible el pago de dividendos en el futuro.

La tradicional aproximación es considerar S como dado en un punto del tiempo, por ejemplo, al iniciar las actividades la empresa, calculando la probabilidad de ruina tal como ya estudiamos . Si dicha probabilidad es alta, deberemos incrementar S o realizar contratos de reaseguro que disminuyan la probabilidad de ruina a un nivel aceptable. Sin embargo la probabilidad de ruina de Lundberg es calculada bajo el supuesto que la ganacia de la compañía es retenida durante todos los períodos futuros. Solo bajo este supuesto la probabilidad de ruina será inferior a 1. Esto significa que es posible que la reserva se incremente a infinito. Alguna política de dividendos que mantenga finita la reserva hace virtualmente cierto que la compañía se arruinará en el futuro. Una teoría del riesgo que no puede acomodarse al hecho del pago de dividendos es poco realista. Vamos a generalizar esta teoría incluyendo el supuesto del pago de dividendos.

Como ya hemos indicado este fondo de solvencia tiene el propósito tanto de evitar la ruina como de asegurar el pago de futuros dividendos, propósito más general ya que el pago de dividendos necesariamente cesará si la compañía se arruina.

Estas consideraciones nos llevan a suponer que la compañía ~~buscará~~ maximizar el valor actual esperado de los pagos de dividendos. Formulemos pues lo siguiente:

Supongamos que la compañía posee S al principio del periodo 1, y sean s_t los dividendos pagados al final del período t. El problema de la compañía será determinar la serie de dividendos $s_o, s_1, \ldots.\ s_t$ que maximice:

$$E\left(\sum_{t=0}^{\infty} v^t\ s_t \right)$$

donde el factor de descuento v será considerado constante a lo largo del tiempo.

Esta formulación está en la linea de la matemática actuarial clásica más que en la Teoría del Riesgo Colectivo.

El valor esperado de los futuros dividendos dependerá de la reserva inicial S que posee la companía al principio del primer período.

Si llamamos V(S) el valor actual esperado de una serie de dividendos óptima, defini-remos la función:

$$V(S) = \text{máx } E\left(\sum_{t=0}^{\infty} v^t s_t\right)$$

Supondremos que esta función existe y cumple las siguientes propiedades:

-- $V(S) = 0$ para $S<0$; esto es, si la compañía no tiene reservas iniciales, no podrá operar y no podrá por tanto pagar dividendos

-- Es continua siempre, excepto posiblemente para $S=0$.

Supongamos que la distribución de la siniestralidad de la cartera de seguros de la compañía es $F(x)$. Asumiremos respecto de ella que $F(x)=0$ para $x<0$ y que existe su derivada $F'(x) = f(x)$ que es continua para los valores de x no negativos.

La prima de riesgo de la cartera es por definición

$$P_1 = \int_0^{\infty} x f(x)\,dx$$

y la prima recargada

$$P = P_1 + P_2$$

donde P_2 es el recargo de seguridad

Si al final de un período cualquiera la compañía tiene unas reservas S y paga unos dividendos s, asegurando de nuevo la misma cartera, sus reservas al final del siguiente periodo serán $S - s + P - x$.

Para un valor arbitrario de s tendremos:

$$V(S) \geq s + v \int_0^\infty V(S - s + P - x)\ f(x)\ dx$$

donde V(S) es el valor acutal esperado de una serie óptima de pagos de dividendos, como ya indicamos. La desigualdad establece que un pago arbitrario s no puede incrementar V(S). — Si, sin embargo, s es un dividendo óptimo, tendremos el signo de igualdad. Por tanto si la función V(S) existe, debe satisfacer la ecuación:

$$V(S) = \max_{0 \leq s \leq S} \left(s + v \int_0^\infty V(S - s + P - x)\ f(x)\ dx\right)$$

Es un problema típico de programación dinámica en el cual podemos considerar los siguientes elementos: un horizonte temporal de n períodos; un vector de estado formado por una ó varias variables de estado, consideremos el indice de estabilidad; como variable de decisión tomemos $Z_i^{\leq S-s}$ siendo el valor del período el de los dividendos repartidos s, o la utilidad de los mismos; la aleatoriedad nos la proporciona la de los siniestros.

Una simple solución al problema nos la proporciona el autor en su trabajo presentado al 17 Congreso Internacional de Actuarios ; consideremos la siguiente función solamente

$$w(s) = s + v \int_0^\infty V(S - s + P - x)\ f(x)\ dx$$

que podemos escribir el la forma $w(s) = s + U(S - s + P)$ cuya derivada es $w'(s) = 1 - U'(S - s + P)$. Si la función w(s) posee un valor máximo de s' en el intervalo $0 \leq s' \leq S$, s' deberá ser una raiz de la ecuación $U(S - s + P) = 1$

De aqui, si s'es una pago óptimo de dividendos cuando la reserva es S, s'- h será un pago óptimo cuando es S - h el valor de dicha reserva.

Se sigue entonces que si w(s) tiene un máximo en el intervalo (0,S), el pago de dividendo óptimo estará determinado por una ecuación de la forma

$$\begin{aligned} s &= S - Z \quad \text{si } S > Z \\ s &= 0 \qquad\;\; \text{si } S \leq Z \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

esto significa que la empresa acumulará reservas hasta un límite Z y distribuirá como dividendos todo beneficio que exceda la cantidad indicada, Z.

Ahora bien , si w(s) tiene un máximo para s'en el intervalo $0 \leq s' \leq S$ tendremos

$$V(S) = s' + U(S - s' + P)$$

que derivada respecto a S y teniendo en cuenta que s'es una función de S si nos fijamos en (I), obtendremos

$$V'(S) = U'(S - s' + P) + 1 - U'(S - s' + P) = 1$$

de aqui podemos escribir

$$V(S) = S + C = S + V(0) \qquad \text{(II)}$$

donde C = V(0) es una constante, determinada por la expresión:

$$V(0) = \lim_{S \to +0} V(S) = v \int_0^{\infty} V(P-x) f(x)\, dx$$

o sustituyendo en (II):

$$V(0) = v \int_0^P (P + V(0) - x)\, f(x)\, dx =$$

$$= v((P + V(0))F(P) - \int_0^P x f(x)\, dx)$$

de donde obtenemos

$$V(0) = v \frac{PF(P) - x\int_0^P f(x)\, dx}{1 - v.F(P)} =$$

$$= v\frac{\int_0^P F(x)\, dx}{1 - v.F(P)}$$

Insertando (II) en la función w(s) definida antes obtenemos

$$w(s) = s + v \int_0^{S-s+P} (S - s + P - x + V(0))f(x)dx =$$

$$= s + v(S - s + P + V(0))F(S - s + P) - v\int_0^{S-s+P} xf(x)dx$$

Con lo que la relación $U'(S - s + P) = 1$ tomará la forma:

$$vF(S - s + P) - vV(0)f(S - s + P) = 1$$

o sustituyendo la expresión encontrada para V(0)

$$(1 - vF(P))(1 - v.F(S - s + P) =$$

$$= v^2 f(S - s + P) \int_0^P F(x)\, dx$$

y si sustituimos v por $(1 + i)^{-1}$ y Z por S - s podemos escribir la siguiente ecuación:

$$\boxed{\frac{f(Z+P)}{1+i-F(Z+P)} = \frac{1+i-F(P)}{\int_0^P F(x)\,dx}} \quad \text{(III)}$$

Si esta ecuación tiene solo una raiz en Z, es fácil ver que (I) es la única solución general a nuestro problema;

Z es una constante que puede ser interpretada como la reserva óptima; como ya indicamos, si al final del período de operaciones la reserva excede Z, el exceso debe ser pagado como dividendos y si la reserva es inferior a Z no serán pagados dividendos.

Con respecto a la relación (III) es interesante hacer notar lo siguiente:

-- la parte derecha de la misma disminuirá con el incremento de P desde infinito a uno.

-- la parte izquierda será monótona decreciente en (Z +P) para un importante grupo de distribuciones de probabilidad, así por ejemplo, si $F(x) = 1 - e^{-ax}$ el término disminuirá desde v a cero.

Para la citada distribución de probabilidad y para un P dado tendremos los siguientes casos:

a) La ecuación tiene una única solución $Z > 0$. En este caso se pagará un dividendo $s = S - Z$ si $S \geq Z$.

b) La ecuación tiene una única solución $Z \leq 0$. En este caso no se pagarán dividendos, segun vimos.

c) La ecuación tiene una raiz no real. Sucederá que v ó P son pequeños. Intuitivamente significa que el valor actual -

esperado de los futuros dividendos es tan pequeño que la compañía no continuará operando.

Es interesante realizar un análisis del factor v introducido en este modelo . No tiene nada que ver con la tasa de interés del mercado, que es irrelevante en el modelo tal como se ha planteado.

En principio este factor permite asegurar la convergencia de la funcional en la programación dinámica, aunque esto se conseguiría con cualquier otra función que tuviera las mismas propiedades analíticas que v^t. Por ello su estudio lo hemos de realizar desde el punto de vista económico.

El factor v representa un sistema de preferencias sobre la temporalidad de los pagos de dividendos. El supuesto de que $v<1$ significa que un pago anterior es preferido a uno posterior.

v^t contine la magnitud i que es homogenea con otra que se le dá como dato al decisor: el tipo de interés de mercado i_o Con ello podemos decir si el empresario es más impaciente o tiene una preferencia mayor por el tiempo que el mercado de capitales.

En el caso de decisiones de financiación, que son las que nos ocupan, es preciso distinguir que esta sea ajena o que se trate de autofinanciación. En este segundo caso hay que dar entrada a la preferencia por el tiempo de los accionistas o mutualistas toda vez que a ello irían destinados los dividendos o excedentes. Cuanto menor preferencia tengan éstos por el por el tiempo tanto mayor será la autofinanciación.

Si en nuestro caso $i=0$ todos los excedentes se acumulan y no habrá reparto de dividendos, el problema de la ruina no los considera. Todo ira a autofinanciación. La solución - coincidirá con la Teoría del Riesgo Colectivo.

Por el contrario, cuanto mayor sea el tipo de interes, tanto mayor es la impaciencia del accionista y por tanto serán menores las reservas de estabilización.

III.2.1. Introducción del reaseguro.

Lo haremos de forma simple: supongamos un reaseguro proporcional, esto significa que la compañía pagará una cantidad $(1 - K)P$ al reasegurador, que a cambio pagará una proporción - $1 - K$ de los siniestros.

Si la empresa tiene unas reservas libres S al final de un período, tendrá que tomar dos decisiones, esto es, seleccionar los valores de dos parametros: s, cantidad pagada por dividendos y K la cuota retenida en el próximo período.

El objetivo de la compañía será como antes maximizar - el valor actual de los pagos de dividendos, lo que nos llevará a la siguiente ecuación funcional:

$$V(S) = \max_{\substack{0 \leq K \leq 1 \\ 0 \leq s \leq S}} \left(s + v \int_0^{\infty} V(S - s + K(P - x)f(x)dx \right)$$

problema que será resuelto con las restricciones:

$$0 \leq K \leq 1 \quad ; \quad Z \geq 0 \quad y \quad s \geq 0$$

siendo las variables de decisión en este caso K y Z.

III.2.2. **Regulación de la solvencia y ruina de la compañía.**

Una cartera de contratos de seguro dará una pérdida si los pagos por siniestros exceden a las primas recibidas. La probabilidad de este suceso es

$$Pr(x > P) = 1 - F(P)$$

Ahora bien, si los siniestros exceden a las primas más las reservas de solvencia de la compañía, ésta no podrá atender sus obligaciones, quedará arruinada. La probabilidad de este suceso es:

$$Pr\ (x > S + P) = 1 - F(S + P) = \alpha$$

El objetivo de la regulación de la solvencia es conseguir que esta última probabilidad sea pequeña. Este es el propósito que esta detrás de las diferentes condiciones que las entidades aseguradoras deben satisfacer, sin embargo es difícil encontrar una norna en cuanto a qué probabilidad de ruina puede ser considerada aceptable.

$1 - \alpha = F(S+P)$ es la probabilidad de que la entidad sea capaz de atender las obligaciones contraidas en sus contratos de seguro. Esta probabilidad es una medida natural de la calidad de dichos contratos. El efecto de la regulación de la solvencia es fijar una mínima calidad para los contratos de seguro que la compañía puede ofrecer en el mercado.

Para satisfacer los requerimientos de la regulación, la compañía deberá poseer unas reservas cuyo valor ha de ser al menos igual a S que viene definido por una ecuación que tiene la forma:

$$F(S + P) = 1 - \alpha$$

Sin embargo, hemos visto en el modelo que la compañía mantendrá una reserva óptima igual a Z definida por la ecuación (III).

Si $Z > S$ no será necesaria la regulación de la solvencia. La entidad mantendra una reserva más que suficiente para satisfacer la cantidad estándar marcada por la regulación.

Si, por el contrario $S > Z$, la regulación y supervisión serán necesarias para la protección de los intereses de los asegurados.

Es difícil, conocer cuál de los dos casos prevalece en el mundo real.

Puede suceder que despues de uno o varios años de operaciones desfavorables las reservas de la compañía sean insuficientes para satisfacer las condiciones de solvencia -- marcadas en la regulación. La entidad aseguradora tendrá que elegir entre dos distintas acciones:

-- Podrá ceder una parte de su cartera a un reasegurador lo que significa una reducción en su escala de operaciones en la medida de la cesión.

-- Podrá buscar capitales adiccionales en el mercado, - hasta conseguir una cantidad suficiente.

A corto plazo la primera de las alternativas es la única solución al problema de la compañía.

La segunda alternativa, puede ser difícil de llevar a cabo, aun a largo plazo, si la entidad aseguradora no representa una atractiva inversión.

Si suponemos apropiado un reaseguro proporcional, lo que nos simplificará las cosas, la compañía puede ceder una cuota $(1 - K)$ de las primas a una entidad reaseguradora, que se comprometerá, a cambio, a pagar una proporción igual de los siniestros de la cartera.

En este caso tendremos:

$$Pr(K.x \leq S + K.P) = Pr(x \leq \frac{S}{K} + P) =$$

$$F(\frac{S}{K} + P) = 1 - \alpha$$

que puede ser satisfecho si K es lo suficentemente pequeño.

La introducción del reaseguro, aunque puede en un momenro reselver los problemas de solvencia, deja sin hacerlo para unos de los grandes problemas que se plantean en el modelo que hemos presentado: las fluctuaciones en el pago de los dividendos de un período a otro.

Es, por tanto, necesario plantear un modelo que se acerque más a la realidad, resolviendo el problema planteado. Examinemoslo:

III.2.3. Modelo generalizado.

De la solución del anterior modelo deducimos que no - serán distribuidos dividendos si las reservas de la compañía son inferiores a Z determinado por (III).

Si la reserrva es mayor que Z el exceso será pagado como dividendo.

Es evidente que esta forma de deciddir el pago de los dividendos conducirá a fluctuaciones en su cuantía durante - los diversos períodos. Tales fluctuaciones serán consideradas como no deseables por la mayoría de las compañías.

En la práctica dichas fluctuaciones pueden ser reduci - das transfiriendo el exceso S - Z a una reservas especial para dividendos y realizar los pagos de dividendos de esta reserva a una tasa fija ó creciente que preferirán la mayoría de las compañías.

Sin embargo, una mayor sofisticación supone considerar no deseables las transferencias a dicha reserva especial para dividendos. Es válido buscar un modelo generalizado que - tenga en cuenta explícitamente la preferencia por la estabilidad de los dividendos.

En este caso introduciremos uan función de utilidad - u(x), definiendo V(S) como:

$$V(S) = \text{máx}\ (u(s) + v\int_0^{\infty} V(S - s + P - x)f(x)dx$$

si u(s) se incrementa más lentamente que s, la compañía asignará una más baja utilidad a un inmediato incremento de los - dividendos que a una tasa mantenida en el futuro.

Esto es, la tasa de dividendos de la actualidad no se incrementara si es razonablemente cierto que una tasa mas elevada puede mantenerse en el futuro.

Como hicimos en el modelo simple, podemos escribir:

$$w(s) = u(s) - U(S - s + P)$$

que derivada nos da:

$$u'(s) - U'(S - s + P) = 0$$

que determina el dividendo óptimo $s=s(S)$ cuando la reserva es S. Derivando otra vez respecto a S tendremos:

$$u''(s) \frac{ds}{dS} - (1 - \frac{ds}{dS})U''(S - s + P) = 0$$

o bien

$$\frac{ds}{dS} = 1 - \frac{u''}{u''- U''}$$

u'' sera normalmente negativa(utilidad marginal decreciente del dinero) y mantendremos lo mismo para U''. De aqui en condiciones muy generales tendremos

$$\frac{ds}{dS} < 1$$

lo que significa que si S se incrementa en períodos sucesivos, solamente una parte del incremento se pagará como dividendos inmediatamente, manteniendose el sobrante en una reserva especial para salvaguardar futuros pagos de dividendos.

Esto supone por tanto, un modelo más realista que el anterior, representando mejor los objetivos de la compañía.

En otro trabajo, el profesor Borch, bajo los mismos supuestos indicados plantea junto a la función V(S,Z) cuyo significado es el ya comocido de valor actual esperado de los pagos de dividendos futuros, la función D(S,Z) que indica el número de ciclos o períodos operativos al término del cual sobreviene la ruina:

$$D(S,Z) = 0 \qquad \text{para} \quad S < 0$$

$$D(S,Z) = D(Z,Z) \quad \text{para} \quad S > Z$$

$$D(S,Z) = 1 - \quad D(S - x,Z)\ dF(x) \quad \text{para} \ 0 \leq S \leq Z$$

D(S,Z) es lógicamente creciente con S y con Z, como se deduce inmediatamente de la naturaleza del modelo y se hace infinita con Z.

Considerando estas dos funciones, podemos sacar algunas conclusiones sobre la forma en que una entidad de seguros tomará sus decisiones ante una determinada situación (supongamos por ejemplo, la selección de un contrato de reaseguro); podemos distinguir tres casos:

1.- Si la entidad se desenvuelve estrictamente como una empresa de negocios, su unico objetivo es obtener beneficiós y pagar dividendos a los accionistas, es natural suponer que tomará la décisión que conduzca al mayor valor posible de V(S,Z). Por tanto el problema que se plantea es: determinar Z y las condiciones de reaseguro que conjuntamente maximicen V(S,Z).

2.- Si la entidad se encuentra ante ciertas obligaciones sociales, que implica no poder aceptar los mismos riesgos que una empresa ordinaria de negocios. En este caso la entidad tratará de hacer $V(S,Z)$ y $D(S,Z)$ tan grades como sea posible. La entidad deberá decidir sobre la relativa importancia de V y D. Se podrá establecer ésta soponiendo que la entidad verá que reserva para siniestralidad y que condiciones de reaseguro maximizarán alguna función $U(V,D)$ que exprese la importancia relativa de los mismos.

3.- Si el objetivo de la entidad consiste en procurar la máxima seguridad a sus asegurados, tratará de maximizar D. Si existiese un limite superior para Z, se establecerá la reserva en este límite máximo y se elegirán las condiciones de reaseguro que maximicen D. Si no hay límite superior para Z, la entidad considerára la probabilidad de ruina de la Teoría del riesgo colectivo.

Otras soluciones propuestas por el prof. Vegas Asensio (123) son:

1.- Obtener el máximo $V(S,Z)$ respecto a Z sujeto a la restricción $D(S,Z) \quad D_o$, esto es, maximizar el valor actual medio de los dividendos repartibles garantizando una vida media aceptable.

2.- Elaborar una función objetivo poderada es decir:

$$\max_{Z} \left(\alpha \log V(S,Z) + (1 - \alpha) \log D(S,Z) \right)$$

siendo α y $(1 - \alpha)$ los pesos y ponderaciones que el asegurador asigna al beneficio y la estabilidad respectivamente.

III.2.4. Una segunda generalización del modelo. (124)

Esta vez podemos considerar los siguientes elementos:

-- Horizonte de gestión .... (0,n)

-- Vector de estado .... $X_t = \begin{bmatrix} S_t \\ P_t \\ \mathcal{E}_t \\ G_t \end{bmatrix}$

-- Programa terminal .... $X_n = \begin{bmatrix} Z_n \\ P_n \\ \mathcal{E}_n \\ G_n \end{bmatrix}$

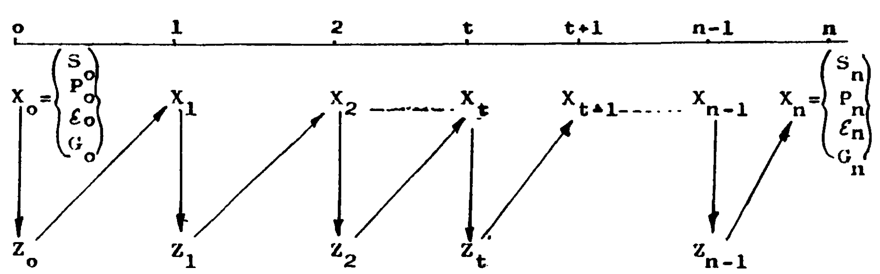
-- Variable de decisión .... Z_t

El programa terminal traduce los objetivos a largo plazo, ya que:

(Z_n, P_n) definen la dimensión técnica deseada para la empresa de seguros y

$(\mathcal{E}_n, G_n)$ es el grado de estabilidad y la distribución de beneficio tambien fijados como objetivo.

El planteamiento gráfico del problema es el siguiente:



y su formulación como problema de programación dinámica:

Representando por $V_t(S_t, Z_t)$ la esperanza matemática de la utilidad de los dividendos desde t hasta el momento n, se tiene la ecuación funcional:

$$V_t(S_t, Z_t)(1+i) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_{t+1}(S_t + Y_{t+1}, Z_t)\, dG_{t-1}$$

las condiciones de contorno son:

a) Si $S_t < 0$ entonces $V_t(S_t, Z_t) = 0$

b) Si $S_t > Z_t$ entonces $V_t(S_t, Z_t) = S_t - Z_t + V(Z_t, Z_t)$

La politica óptima: a partir de los datos contenidos en:

--Los objetivos económicos. $(\mathcal{E}_n, G_n)$

--El criterio de decisión (v y u(y))

Tenemos para la primera etapa:

$$V_{n-1}(S_{n-1}, z_{n-1})(1+i) = \int V_n(S_{n-1} + y_n, Z_{n-1})\, dG_n =$$
$$= \int U(S_{n-1} + y_n - Z_{n-1})\, dG_n$$

de aqui se obtiene la subpolítica óptima Z^*_{n-1} (con la restricción dada por el índice de estabilidad $\mathcal{E}_o$). A partir de

$$V_{n-1}(S_{n-1}, Z^*_{n-1})$$

se obtienen en etapas sucesivas

$$V_{n-2}(S_{n-2}, Z^*_{n-2}) \ldots\ldots\ldots\ldots V_1(S_1, Z^*_1),\ V_o(S_o, Z^*_o)$$

a partir del valor inicial S_o se calcula la primer politica óptima Z_o. A partir de aqui se llega a S_1 y de

$$V_1(S_1, Z_1) = \text{máximo}$$

se obtiene Z^*_1. Asi sucesivamente se llega a la estrategia óptima para toda la duración del programa

$$Z^*_o,\ Z^*_1 \ldots\ldots\ldots\ Z^*_{n-1}$$

III.3. UN MODELO DINAMICO ESTOCASTICO.

Estudiaremos a continuación el modelo ideado por Tievo Pentikäinen. Una primera aproximación del mismo fue presentada por el autor en el coloquio ASTIN de junio de 1.974 siendo desarrollada en años sucesivos en los siguientes trabajos:

- /1/."A model of stochastic-dinamic prognosis. An application of risk theory to business planning" Scandinavian Actuarial Journal 1975.
- /2/ "Stochastic-dinamic prognosis" Transactions of the Congress of Actuaries. Tokyo 1.976.
- /3/ Discussion on the uplication of dinamic progamming for insurance busines. Discussions Congress of Actuaries Tokyo.
- /4/ "A solvency model building approach for busines planing" Scand. Act. Journal 1.978.
- /5/ "Dinamic programming, an approach for analysing competition strategies". ASTIN bulletin. Vol.10 1.979.
- /6/ "A stochastic-dinamic model for insurance business" 21 st International Congress of Actuaries, Zurich-Lausane 1980.
- /7/ Pentikäinen y J. Rantala "Evaluation of the capacity of risk carriers by means of stochastic-dinamic programming" ASTIN bulletin. Vol. 12. 1.981.

Podemos destacar tambien el estudio que sobre dicho modelo presentó T. Hirvohen en el 20 Congreso de Actuarios de Tokio, en las discusiones del mismo.

Como indica el autor, las aplicaciones convencionales de la Teoría del Riesgo consideran las partes más importan-tantes del negocio de seguros; evaluación de la estabilidad, estimación de la retención máxima apropiada, recargo de seguridad, reservas, etc. La utilidad de las citadas aplicaciones a la dirección dependerá de como el tratamiento teórico del riesgo se ha unido a la complejidad de los restantes aspectos relacionados con la toma de decisiones. Las dificultades han sido considerables y han llevado a una opinión generalizada de que la Teoría del Riesgo tiene poca aplicación práctica. Nuestro propósito es salvar este obstáculo, construyendo una imagen del proceso de dirección del negocio de seguro en su totalidad, tomando los aspectos teóricos del riesgo como una parte entre muchas otras que no tienen carácter actuarial. De esta forma las clásicas aplicaciones de la Teoría del Riesgo se unirán a las ideas de la moderna planificación y predicción a largo plazo" /1/.

La teorías de la planificación y dirección de negocios hacen uso de los modelos como una herramienta de análisis del estado y desarrollo futuro de la entidad. Como ya es sabido, el estado de la entidad es descrito por un conjunto de variables de estado y el futuro desarrollo por medio de una ecuaciones de transición, que nos darán los cambios en las variables de estado. Existirán una serie de parámetros internos y externos a la entidad, algunos de los cuales no pueden ser controlados por la dirección, mientras que otros se encuentran bajo su control y dependen de las decisiones tomadas.

En términos genrales, una vez construido el modelo y elegida la estrategia, podremos conocer el desarrollo futuro del negocio.

Supongamos que el estado de la compañía en el momento t viene definido por un conjunto de variables. De forma abreviada podemos representar este conjunto por $\theta(t)$, vector de estado.

Una vez que la dirección conoce el estado de la compañía, tomará las decisiones oportunas,el conjunto de las mismas vendrá representado por $S(t)$, vector de estrategia. Este será válido para el siguiente año y será revisado anualmente de acuerdo con el desarrollo del estado de la compañía.

Junto al estado actual y las decisiones tomadas, circunstancias externas y factores aleatorios influyen en el desarrollo del negocio. El vector $p(t)$ describirá estos factores estocásticos.

De forma simbólica, podemos decir que, el estado de la compañía es de alguna forma un "producto" de los tres vectores anteriores:

$$\theta(t+1) = \theta(t) \times S(t) \times p(t)$$

donde $\theta(t)$ y $S(t)$ son conocidas. La fórmula anterior nos permitirá pronosticar es estado despues de un año, aunque no será posible hacerlo exactamente ya que depende del vector aleatorio $p(t)$, sin embargo,será posible dar un intervalo en el cual con cierta probabilidad se encontrarán los valores de las variables de estado. Repitiendo el proceso, las distribuciones de probabilidad para t+2, t+3 etc pueden ser obtenidas, depndiendo sus resultados de la estrategia seguida S.

Como indica Pentikainen:" los modelos determinísticos han sido ampliamente desarrollados para la dirección e investigación de las entidades de seguros, como lo muestran los trabajos presentados en el 20 Congreso Internacional de Actuarios, La introducción del caracter probabilista a los mismos mejora su aplicabilidad considerablemente. Pueden proporcionar información sobre las fluctuaciones del negocio, característica básica de los seguros generales, dando luz sobre los problemas de solvencia. Por otra parte, es cierto que los elementos probabilísticos complican el modelo en gran medida sobre todo en cuanto a los cálculos a realizar en el mismo; las dificultades pueden ser solventadas mediante convenientes aproximaciones y simplificaciones." /3/.

Hemos de destacar tambien el carácter dinámico del modelo a construir, el estado en el momento t dependerá, como hemos indicado, del estado en t-1 y quiza del de momentos anteriores y el carácter cibernético, esto es, autocorrectivo, por ejemplo, si la solvencia de la entidad se deteriora, la estrategia del negocio será progamada para colocar recursos en reservas en lugar de hacerlo en gastos de promoción o dividendos.

La idea básica es tratar de describir el proceso de dirección de una entidad aseguradora por medio de un modelo matemático.

Abreviadamente, el proceso de dirección puede ser caracterizado en la siguiente forma: la dirección del negocio de seguro obtiene información sobre el desarrollo y el estado del mismo. Sobre la base de los datos recogidos y analizados serán tomadas las decisiones que afectarán al siguiente período.

Nuestro propósito es describir este proceso en detalle y dar métodos para pre-evaluar las consecuencias de las diferentes decisiones.

Las fases del proceso serán por tanto las siguientes:

1.- Información del pasado y estado actual del negocio referente a materias como:

-- Reservas libres, visibles y ocultas. Evaluación de la solvencia.

-- Análisis del beneficio o pérdida, detallado para los diferentes ramos y grupos, evaluando lo adecuado de las primas.

-- Inversiones y su rentabilidad.

-- Gastos de administración, adecuación del recargo correspondiente a los mismos.

-- Reaseguros, análisis del costo.

-- Factores exógenos:

- estado general de la economía y su efecto sobre el desarrollo del negocio asegurador.

- condiciones del mercado: crecimiento real de la cartera y respuesta del mercado a la promoción. Competencia.

- tasa de interés.

- Inflacción.

- Legislación en materia aseguradora.

- Acuerdos internacionales etc.

2.- Toma de decisiones.

Despues de un profundo examen de los datos indicados, la dirección habrá de tomar las decisiones adecuadas. En - nuestro modelo supondremos que las decisiones son válidas para un año y revisadas al final del mismo. Los principales puntos de interés en nuestro modelo a estos efectos son los siguientes:

-- Colocación del beneficio y otros recursos en:

- dividendos a accionistas y asegurados, incluyendo bonos y devoluciones a los últimos.
- refuerzo de las reservas libres.
- gastos de promoción.
- gastos de racionalización.

-- Posibles modificaciones en el precio del servicio.

-- Pólitica de reaseguro, modificación en caso necesario.

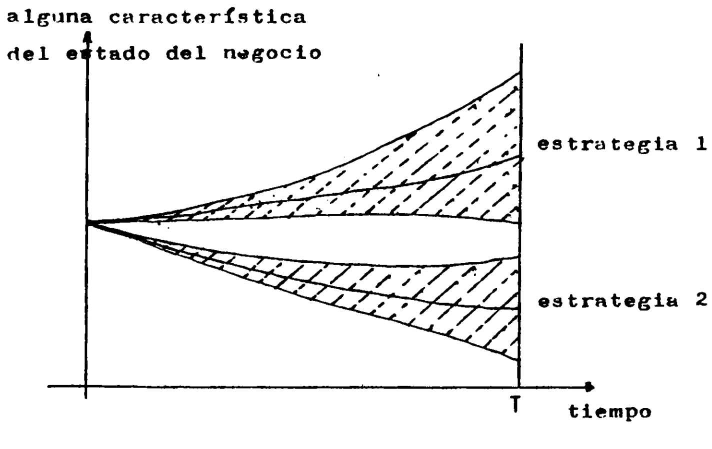
-- Inversiones, posible modificación de las mismas.

-- Operaciones internas, por ejmplo, desarrollo de las técnicas de gestión, mecanización etc.

3.- Establecimiento de planes a largo plazo por medio de pronóstico.

La influencia de las decisiones tomadas o planeadas - es, en la mayoría de los casos, difícil de evaluar sin técnicas especiales, que normalmente se basan sobre varios pro nósticos. Estos se extienden a lo largo de un período de varios años. Para la realización de un pronóstico, es necesario considerar reglas de control del negocio, esto es reglas para las decisiones antes citadas, que definen la política o como tambien se llama la estrategia del negocio.

La principal diferencia entre nuestro método y los convencionales predicciones a largo plazo es que el carácter estocástico del negocio de seguro es tenido en cuenta, mientras que en general se opera en forma determinística, lo que nos da para cada conjunto de supuestos un valor exacto del estado del negocio en cada futuro momento del tiempo. El aspecto estocástico considerado nos dará en lugar de un punto, una distribución para cada valor esperado en cada momento del tiempo. Un pronóstico estocástico nos dará una "Banda" en la cual, con una probabilidad dada, evolucionará el estado de la compañía.



El modelo elaborado será especialmente apropiado para la planificación del negocio, ya que pueden ser comparadas las diferentes estrategias y tomados en cuenta los factores externos. Nuestro propósito será encontrar la mejor estrategia; pero esto será posible solamente si los objetivos del negocio están definidos explícitamente.

Los objetivos clásicos de una entidad aseguradora son:

-- Solvencia.

-- Maximización del beneficio.

-- Expansión del negocio.

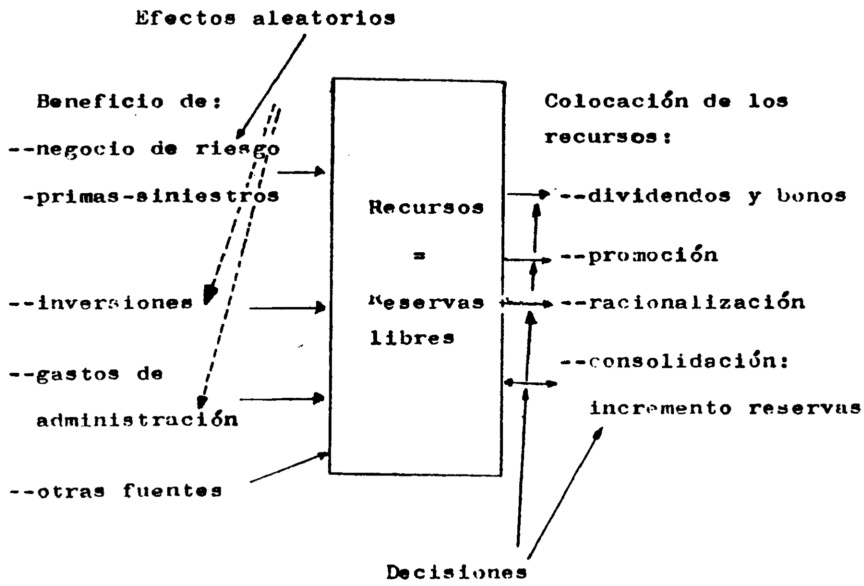
La Teoría del Riesgo opera fundamentalmente sobre la base de un criterio de solvencia. Posteriormente De Finetti y Borch, pusieron su atención, como hemos estudiado anteriormente, en los dividendos repartibles, claramente relacionados con el benficio.

En la empresa moderna, la maximización del beneficio como único y fundamental objetivo ha sido sustituida por objetivos cuyo fin es garantizar la continuidad y expansión del negocio. El tamaño de la empresa medido por medio de su total de ventas o por la parte de mercado que posee es como indica el autor del modelo un "símbolo de estatus". Lo apreciado que sea un director profesional dependerá en muchos casos del crecimiento que muestre la firma; esto puede llevar a que la expansión de la compañía se convierta en el principal objetivo, pasando tanto la solvencia como el beneficio a ser subsidiarios del anterior aun manteniendo su importancia.

Nuestro modelo seguirá los tres objetivos. La elección entre ellos determinará la mejor estrategia.

III.3.1. Formalización del modelo.

Las ideas fundamentales de la programación dinámica aplicadas al negocio de seguros pueden ser representadas gráficamente en la siguiente figura.



Nuestros recursos provienen del negocio de riesgo, la rentabilidad de las inversiones, la administración etc. Los beneficios son llevados a las reservas libres; por otro lado, parte de los recursos son destinados a diferentes propósitos de acuerdo con las decisiones de la dirección: dividendos, promoción etc. El resto permanecerá en la entidad con el fin de consolidar su estabilidad.

En concreto distinguiremos:

Variables de estado: nos describirán el estado de la compañía en un momento del tiempo t. Tales variables serán el volumen de primas P, las reservas técnicas V, la reserva de riesgo U, las diferentes clases de activos etc.

El conjunto de todas ellas será llamado, como ya indicamos; vector de estado.

Ecuaciones de transición: controlan el cambio del estado en el momento t al estado en el t + 1. Tomaremos como unidad de tiempo el año. Mas adelante ampliaremos este punto

Variables exógenas: serán introducidas en el modelo para indicar circunstancias externas al mismo como pueden ser el desarrollo del mercado, reacciones de los competidores por ejemplo. Para ello hemos de introducir los apropiados parámetros para inversiones, costos de dirección, función de respuesta del mercado etc.

Parámetros endógenos: nos decriben circunstancias internas y el flujo del negocio.

Variables de decisión: son aquellas que el director de la compañía puede controlar, al menos en un considerable grado, tales como tasas de primas, gastos de promoción, dividendos y bonos etc.

Cada conjunto de variables de decisión nos definirá una estrategia del negocio.

A continuación desarrollaremos el modelo bosquejado.

Siguiendo el esquema anterior, Pentikäinen plantea la siguiente ecuación de transición básica:

$$Y(t) + I(t) + H(t) = D(t) + C(t) + \Delta U(t) \qquad (1)$$

que "une la programación dinámica con los tradicionales modelos de predicción" /4/.

Nos describe la transición del momento t - 1 al t, teniendo sus componentes el siguiente significado:

$Y(t)$ indica el benficio del negocio de seguro. Este término introduce el elemento estocástico en nuestro modelo.

$I(t)$ será el beneficio por inversiones: es igual a los intereses de los distintos tipos de inversiones menos las transferencias obligatorias a las reservas técnicas.

$H(t)$ beneficio de administración. Es igual a la diferencia entre el recargo incluido en las primas para dicho propósito y los gastos reales actuales. Sería posible dar una predicción de tipo determinístico del término en base a técnicas tradicionales de planificación a largo plazo.

$D(t)$ representa aquella parte del beneficio y otros recursos colocada en dividendos y bonos. Es una de las decisiones a tomar.

$C(t)$ representa los gastos de promocion de ventas. Este término tiene gran importancia en el modelo como más adelante comprobaremos.

$U(t) = U(t) - U(t - 1)$ es el término de equilibrio, indica la cantidad de reursos transferidos a las reservas libres.

En resumen, el término izquierdo de la ecuación básica (1) nos da los recursos disponibles, mientras que el término de la derecha nos muestra su reparto.

Los primeros trabajos de Pentikäinen referentes al modelo que nos ocupa (consultar el publicado en 1975 en Scandinavian Actuarial Journal y el presentado en 1976 en el Congreso de actuarios de Tokio) planteaban la ecuación de transición con diferentes demoras, asi en /1/ proponía:

$$Y(t) + iU(t) + \Delta iV(t) - (\lambda - \lambda^r) P^r(t) = \Delta U(t) + D(t+1) + C(t+1) + R(t+1)$$

donde:

ΔiV es el beneficio obtenido por los interes de las reservas técnicas V, siendo Δi la diferencia entre el interés obtenido y el interés técnico.

$R(t+1)$ es la cantidad dedicada a la racionalización de la gestión y otros propósitos.

P^r es la parte de las primas cedida al reasegurador, siendo por tanto $(\lambda - \lambda^r) P^r$ la parte del recargo de seguridad de las primas cedidas que es retenido.

Para dar operatividad al modelo es oportuno hacer algunas precisiones respecto de sus principales elementos:

Reservas libres.-

Consideraremos reservas libres tanto las expresas como las ocultas (por ejemplo una infravaloración de los activos en que estan invertidas las reservas técnicas). Para evaluar el estado de la compañía es necesario diferenciar entre dis -

tintas partes y niveles de las reservas libres. Las reservas son necesarias para equilibrar los beneficios y pérdidas de años consecutivos. En la práctica la parte oculta de las mismas puede ser usada para este propósito ya que puede no ser conveniente "tocar" las reservas expresas, que podría ser interpretado por la competencia y los asegurados como un síntoma de que la compañía se encuentra en un alarmante estado.

Nosotros definiremos unos límites para la cantidad de reservas libres:

- $U_{1,t}$ es aquel límite por encima del cual podemos usar,con toda tranquilidad, las reservas para equilibrar los beneficios y pérdidas anuales.

Podemos decir que si $U > U_{1,t}$, la solvencia de la compañía es buena.

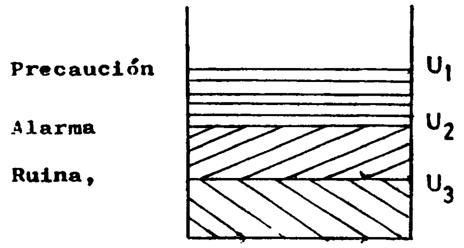
- $U_{2,t}$ es el límite donde el estado de la compañia comienza a ser alarmante.

Si $U_1 > U > U_2$, la solvencia de la compañía no es muy buena, pero todavía no nos encontramos en un estado crítico.

En la colocación del beneficio tendrá preferencia el incremento de las reservas sobre cualquier otra alternativa.

- $U_{3,t}$ es el límite por debajo del cual, de acuerdo con la legislación del pais en concreto, la compañía está arruinada.

Si $U < U_3$ la compañía no podrá seguir operando.



Uno de los trabajos a realizar con anterioridad a la formulación de la estrategia del negocio es definir los límites U_1 y U_2.

Esto limites estarán en función de la calidad de la cartera de la entidad aseguradora. La Teoría del Riesgo puede ser de ayuda para determinarlos.

<u>Composición de la cartera.-</u>

La cartera puede ser dividida en grupos $1,2,\ldots,v,\ldots N$ Los grupos pueden ser, por ejemplo, los diferentes ramos y subgrupos dentro de los mismos.

<u>Ingresos de primas.-</u>

Supondremos, como es usual en la Teoría del Riesgo, que el recargo para gastos de administración es sustraido de las primas brutas.

El resto es denotado por $(1+\lambda_t)P(t)$. Donde λ_t es el recargo de seguridad y $P(t)$ la prima de riesgo.

Los ingresos totales de primas serán la suma de las primas de cada uno de los diferentes grupos que componen la cartera:

$$(1 + \lambda_t)P(t) = \sum_{v} (1 + \lambda_{v,t})P_{v,t}$$

Beneficio en los gastos de administración.-

Como hemos indicado será la diferencia entre los gastos actuales y el recargo correspondiente, que es una parte de las primas brutas.

Recargo de seguridad λ_t.-

Será la suma de los correspondientes recargos de los diferentes grupos.

$$\lambda_t = \sum_{v} \frac{P_{v,t}}{P_t} \lambda_{v,t}$$

Fluctuación de las probabilidades básicas.-

Aunque han sido analizadas con mayor profundidad al realizar el estudio de la distribución del número de siniestros, repasémoslas para introducirlas en el modelo en forma algo diferente:

La clasificación de dichas fluctuaciones era la siguiente:

- De corto plazo que causan una variación en la frecuencia de siniestralidad de año a año. El coeficiente $1 + x_t$ nos dará el cambio en el nivel de las probabilidades básicas en el año t, comparado con el nivel normal. Estas fluctuaciones pueden ser causadas por las condiciones climatológicas, epidemias etc. Los valores de años consecutivos son independientes, por lo cual x será una variable aleatoria independiente del tiempo.

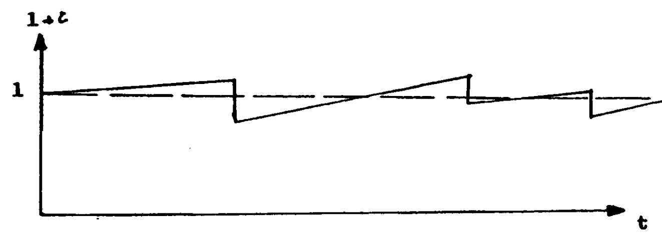


figura 1

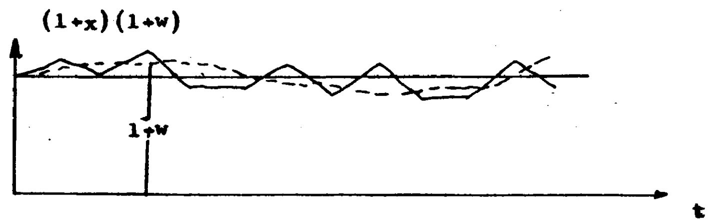


figura 2

- De largo plazo, que poseen período superior a un año El cambio en el nivel de las probabilidades básicas lo denotaremos por $1 + w_t$, donde w_t es una variable aleatoria cuyo valor es tambien independiente para años consecutivos. Estas fluctuaciones pueden ser causadas por las variaciones de largo plazo en las condiciones económicas.

- Tendencias, que aparecen en la frecuencia de siniestralidad, a un incremento o disminución paulatino. Por ejemplo los nuevos métodos de construcción y otros cambios en las circunstancias pueden, durante largos períodos, causar considerables cambios en las probabilidades de siniestros. En la práctica aseguradora pueden dar lugar a un incremento del beneficio o la pérdida. Como consecuencia, despues de algún tiempo han de ser módificadas las primas. Tomaremos $1 + \tau$ la influencia relativa de la tendencia sobre el beneficio en comparación con el nivel previsto cuando las tasas son calculadas. La figura 1 nos muestra en forma gráfica lo indicado. Por otra parte en la figura 2 podemos observar la influencia conjunta de las fluctuaciones.

No hemos de olvidar la interrelación que existe entre las diferentes clases de influencias y tendencias y el recargo de seguridad: si, por ejemplo, si la probabilidad de siniestros se incrementa y las primas no son modificadas, el recargo de seguridad disminuirá. Lo apropiado en este caso seria fijar el recargo de seguridad y considerear separadamente el efecto de las fluctuaciónes.

<u>Número esperado de siniestros.-</u>

Para la cartera total será igual a la suma del número de siniestros de los diferentes grupos de la misma.

$$n_t = \sum_{v} n_{v,t}$$

Si tenemos en cuenta las variaciones en las probabilidades básicas:

$$n'_t = \sum_{v} n_{v,t}(1+ x_{v,t})(1+ w_{v,t})$$

donde las varibles x y w que representan dichas variaciones han de considerarse para cada uno de los grupos.

El numero de siniestros es la base para el cálculo de las tasa de primas:

$$P_{v,t} = n_{v,t}\, m_{v,t}$$

donde $m_{v,t}$ es el tamaño medio de un siniestro.

Reaseguro.-

Lo tendremos en cuenta por medio de la máxima retención neta M_v determinada para dada grupo v de la cartera

$$M_v = M\,\mu_v$$

donde μ_v es un factor que nos da el nivel relativo de la retención maxima del grupo. M será la retención neta máxima ponderada para el total de la cartera.

μ_v puede ser determinado en varias formas, una de ellas es tomar $\mu_v = K\lambda_v$. donde λ_v es el reeargo de seguridad del grupo v y K es una constante.

Evidentemente es importante tener el cuenta la clase de reaseguro, que dependerá tanto de la política de la entidad como de las condiciones del mercado de reaseguro.

Distribución de la siniestralidad total.-

Es necesaria para nuestro modelo estocástico.

Podemos utilizar cualquiera de las aproximaciones de la misma. Un estudio pormenorizado de éstas ha sido realizado en las páginas 104 a 115 del presente trabajo y a él nos remitimos.

Volviendo a la ecuación básica (1), vamos a realizar un estudio más profundo de sus componentes. Comenzaremos viendo como se distribuyen los recursos:

Dividendos D(t): entenderemos dividendos en un sentido amplio, nos referiremos tanto a los pagos a accionistas como bonos y participaciones en beneficios de los asegurados.

Desde el punto de vista de la dirección es deseable - una estabilidad en los pagos durante los diferentes periodos.

Parece apropiado que el volumen de los dividendos pagados sea proporcional al tamaño de la entidad.

$$D(t) = d.P(t)$$

donde d es una constante. La p arte de los mismos repartido en bonos puede ser diferente para cada uno de los grupos asi tendremossque $D' = \sum_{r} d_v \cdot P_v$

Esta forma para los dividendos es interesante a efecto de cálculos; de hecho, los dividendos pueden ser tomados directamente del recargo para gastos de administración o, lo que en el fondo es lo mismo, pueden ser tenidos en cuenta al fijar el valor del recargo de seguridad.

En caso de que el valor de d influya la expansión del negocio,(por ejemplo, el nivel de bonos puede promocionar - las ventas) habrá que establecer una relación entre el valor de d y la respuesta del mercado, como más adelante podremos observar.

Gastos de promoción de ventas C(t). Es quizá el término más problemático de la ecuación básica.

Supongamos que la entidad aseguradora tiene una normal organización adquisitiva, pagada a través del recargo correspondiente incluido en las primas. Por C entenderemos la cantidad destinada a reforzar los gastos de adquisición y los gastos dedicados para promocionar las ventas.

Nuestra intención es encontrar una fórmula que coloque una parte importante de los recursos disponibles para el propósito que nos ucupa en el caso de que la solvencia de la compañía sea buena, o pocos recursos, incluso nada, si la solvencia no lo es.

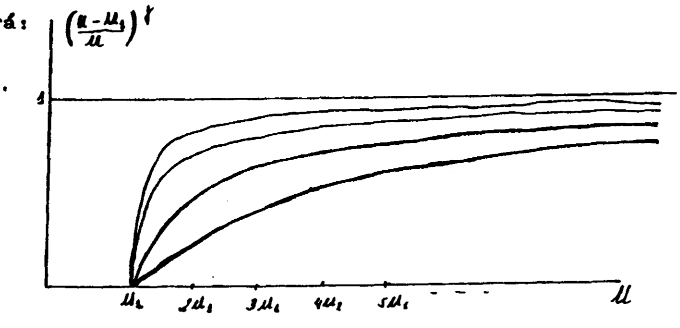
Tievo Pentikäinen propone el estudio de las políticas que en este sentido llevan a cabo distintas compañías, a falta de lo cual, especula en base a una fórmula de tipo parecido a la siguiente:

$$C(t) = \beta \left(\frac{U(t) - U_{1,t}}{U(t)}\right)^{\gamma} \left(\frac{\bar{\lambda}_1 - \alpha}{|\bar{\lambda}_1|}\right) (U(t) - U_{1,t}) \text{ si } U(t) > U_{1,t}$$

$$C(t) = 0 \text{ si } U_{1,t} > U(t) > U_{2,t}$$

$$C(t) = -\delta P(t) \quad \text{si } U(t) < U_{2,t}$$

donde el significad de los limites de las reservas del solvencia U_1 y U_2 han sido definidos más arriba; α, β, γ y δ son coeficientes, y representan los parámetros libres del modelo. Gráficamente el segundo factor de la primera de las tres relaciones, que se incrementará más rapidamente cuanto más alejadas se encuentren las reservas del nivel de solvencia U_1 será:



El tercero de los factores de la misma fórmula indica la posibilidad de tener en cuenta el nivel de beneficios. Así $\bar{\lambda}_t$ es el valor medio de $Y(t)$ durante los últimos años:

$$\bar{\lambda}_t = \frac{1}{h}\left(\frac{Y(t-h-1)}{P(t-h-1)} + \ldots\ldots + \frac{Y(t)}{P(t)} \right)$$

El último factor nos indica que el exceso de reservas libres sobre U_1 es la base de la expansión de la compañía, - esto es, una parte del mismo (dada en términos relativos por los dos anteriormente citados terminos) será didicada a expansión.

Cuando $U_{1,t} > U(t) > U_{2,t}$ daremos prioridad al crecimiento de las reservas, no dedicando ningún esfuerzo extraordinario a la expansión.

Por fin, si $U(t) < U_{2,t}$, la compañía se encontrará en estado alarmante en cuanto a su solvencia, habiendo de ser - tomadas medidas de emergencia como la reducción de los gastos normales de administración y adquisición y postponer en lo - posible todo gasto no indispensable; este es el sentido que tiene el signo negativo de la fórmula, que nos dá una apropiada flexibilidad al modelo propiciando el equilibrio del - riesgo, ya que la probabilidad de ruina se incrementará considerablemente al limitar el crecimiento de las reservas libres. Ya hemos indicado que, según la Teoría del Riesgo, si existe dicho límite, la probabilidad de ruina es asintóticamente 1 cuanto el período de observación tiende a infinito.

El objetivo de dedicar parte de los recursos de la entidad al refuerzo de los gastos de adquisición es obtener una mayor expansión de la misma. Esto puede ser expresado en la siguiente fórmula:

$$n_t = \sum_v n_{v,t} = \sum_v (n_{v,t-1} + c_{v,o}n_{v,t-1} + c_{v,1}C_{v,t-1} + c_{v,2}\,C_{v,t-2} + \ldots\ldots)$$

Donde n_t es el núemro esperado de siniestros del indicado período, y si tenemos que m es el tamaño medio de un siniestro, el volumen de primas será:

$$P(t) = n_t \cdot m_t = \sum_v n_{v,t} \cdot m_{v,t}$$

El coeficiente $c_{v,o}$ nos describe la intensidad del crecimiento debido a unos gastos normales de adquisición y ventas.

Los coeficientes $c_{v,1}$, $c_{v,2}$...... indican la intensidad del crecimiento debido al refuerzo de los anteriores gastos durante el período considerado, no es poco realista suponer que los recursos dedicados al propośito que nos ocupa darán resultados durante varios períodos posteriores. Estos coeficientes son empíricos e indican la dependencia de las ventas de los correspondientes gastos, la dimensión de los mismos ha de ser el inverso de la unidad monetaria considerada.

Una apropiada política de la entidad puede ser concentrar estos gastos extraordinarios en aquellos ramos en los cuales la rentabilidad es mayor, esta el la razón de la descompsición de la fórmula en diferentes grupos.

Continuemos con los terminos de la parte izquierda de la ecuación básica (1), esto es, aquellos que no indican el origen de los recursos.

Y(t) es el beneficio del negocio de riesgo, obtenido de la expresión:

$$Y(t) = (1 + \lambda) P(t) - X(t)$$

donde λ es el recargo de seguridad, que en algunos casos puede ser considerado como un dato, aunque si la competencia y las circunstancias del mercado lo permiten, la dirección puede tener un cierto grado de libertad en la elección entre diferentes valores del mismo. En este último caso el recargo de seguridad es una variable de decisión; en algunos casos esta posibilidad de elección puede afectar a los anteriormente estudiados coeficientes c.

La siniestralidad total en un período t, X(t), puede ser calculada por medio de simulación,(en este punto me remito a lo expuesto en el correspondiente capítulo de la presente tesis). Es oportuno tener en cuenta las posibles variaciones en las probabilidades básicas a traves de x y w tal como ya se indicó.

El reaseguro influye en la distribución de la siniestralidad a cargo de la compañía. M, retención neta máxima, es una de las variables de decisión. Si las reservas libres se incrementan considerablemente, la retención neta podrá ser incrementada, recordemos lo indicado durante el estudio de -

la Teoría del Riesgo.

En cuanto a las otras dos fuentes de recursos consideradas en nuestro modelo, él beneficio ó pérdida que surge al comparar los gastos de gestión con los ingresos que para tal concepto se obtienen del correspondiente recargo en las primas, puede,en principio,ser predicho con cierta facilidad. En la práctica, esto no resulta tan sencillo, podemos recordar las previsiones del Plan Estratégico del Seguro Español en cuanto a la evolución de los gastos de gestión y la realidad de los mismos, aunque puede servir como explicación - las peculiares circunstancias políticas y económicas del período de predicción.

Los recursos que provienen de la actividad inversora de la compañía dependerán en gran medida de la gestión de - la cartera de inversiones, asi como de las circunstancias generales del mercado de capitales. No es necesario mayor extensión en este punto, que ha sido ampliamente tratado en el capítulo correspondiente. En no vida no será de gran interés la comparación de la rentabilidad de las reservas técnicas realmente conseguida con la prevista en las bases técnicas como sucede en el ramo de vida.

La inflación no debe ser olvidada y más adelante dedicaremos a su estudio e introducción en el modelo la atención debida.

Si queremos operar con valores actuales reales, el tipo de interés será igual a la diferencia entre la tasa de interés actual y la tasa de inflación:

$$i = i^{act} - i^{infl.}$$

III.3.2. Predicción estocástico-dinámica.

La forma del modelo y los parámetros definidos y explicados anteriormente han de ser fijados. Podemos distinguir dos tipos de parametros fundamentalmente:

-- Parámetros empíricos: dependen de las circunstancias actuales y estan fuera del control de la dirección. Son de este tipo los coeficientes c, la tasa de interés de mercado, las distribuciones de la cuantía de un siniestro etc.

-- Parámetros de decisión: describen las reglas de toma de decisión incluidas en el modelo. Principalmente estos parámetros controlan el reparto de los recursos entre las distintas posibilidades indicadas en la ecuación básica. Pertenecen a esta categoría la constante de dividendos d y en cuanto a adquisición y ventas α, β, γ, δ y h; asi como los parámetros que nos determinan la retención neta de rea-seguro.

Un conjunto de valores de los parámetros de decisión nos definen una estrategia de dirección. Dando diferentes valores a dichos parámetros obtendremos distintas estrategias.

Cuando los valores iniciales de n y de U, numero medio de siniestros y reservas, son conocidos , y se concreta el valor de los parámetros, podemos calcular el estado del negocio utilizando la fórmula básica de recursión para el período t=1. Antes hemos de simular la siniestralidad total X y de cualquier otra que podamos introducir.

El calculo se realizará en las misma forma para los - siguientes períodos de tiempo.

Una serie de valores de las variables de estado para los períodos de tiempo consecutivos, pueden ser expresadas - en la siguiente forma:

$n_1, n_2, \ldots\ldots n_T$

$P_1, P_2, \ldots\ldots P_T$

$U_1, U_2, \ldots\ldots U_T$

$D_1, D_2, \ldots\ldots D_T$

Algunos de los valores anteriores pueden darse tambien para cada uho de los grupos en que hemos descompuesto la cartera.

En este caso es sencillo formular un criterio de solvencia:

Si $U(t) < \bar{U}_{3,t}$ para algún valor de t, la compañía - estará "arruinada".

El proceso anterior debe ser repetido gran cantidad de veces, obteniendose así nuevas realizaciones del negocio para el período T.

Los diferentes valores de las variables pueden ser representados estadísticamente. Podemos obtener tambien la distribución simulada de las variables de estado n, P, U, valor actual de los dividendos etc, de las cuales pueden ser obtenides sus momentos más importantes.

Un problema práctico y teórico es la clasificación de los resultados de la simulación de forma que sirvan a la dirección de la compañíá en la mejor forma posible. La idea es la búsqueda de una estrategia óptima, esto es, tratar de encontrar un conjunto de valores de las parámetros de decisión, que nos conduzcan al mejor resultado posible.

Una forma de proceder es la repetición del proceso para diferentes estrategias y mas o menos intuitivamente el valor apropiado de los parámetros. Por ejemplo, podemos fijar todos los parámetros menos uno, dando a este diferentes valores. Quizá nos sea posible expresar el flujo del negocio como función de dicho parámetro. Cambiando el parámetro libre podemos obtener nuevos resultados y de esta forma, paso a paso, podamos obtener una estrategía, que si es la óptima, por lo menos esté cercana a ella.

Un procedimiento mejor, aunque algo más complejo, consistiría en formular los objetivos del negocio en forma matemática, construyendo una función de utilidad que exprese dichos objetivos. Quizá fuera posible programar el computador para hacer uso de esta función de utilidad en alguna forma, por ejemplo sobre una base de prueba y error para continuar el proceso hacia una estrategia óptima.

Una dificultad con la que nos encontramos es la existencia de un gran número de parametros, que nos puede llevar a la necesidad de una simplificación del modelo y reducir las alternativas permitidas.

III.3.3. **Estudio de la solvencia.**

Puede ser realizado con los resultados obtenidos de las distintas realizaciones del modelo.

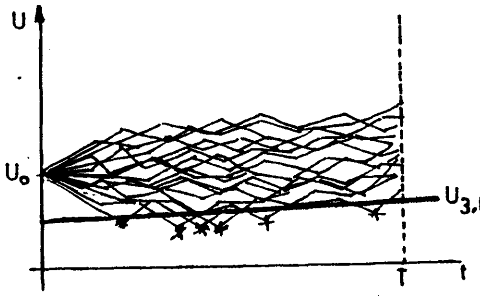
Como hemos indicado la entidad estará arruinada cuando en algún momento del tiempo $U(t) < U_{3,t}$.

Una estimación de la probabilidad de ruina;

$$\text{Prob}\ (U(t) < U_{3,t}) \qquad t = 1,2,3....T$$

puede ser obtenida como el cociente del número de simulaciones que conducen a la ruina y el número total de simulaciones realizadas.

El proceso puede ser representado gráficamente en la siguiente forma:



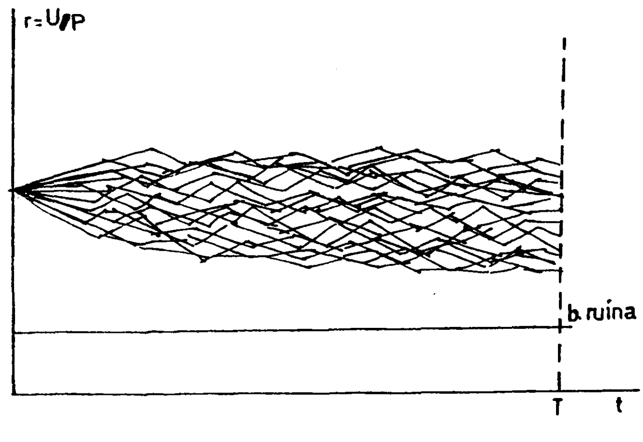
Si fijamos un límite superior para la probabilidad de ruina, habremos establecido una restricción a las variables de decisión, en el sentido que no podran tomar aquellos valores que lleven a una probabilidad de ruina, en la forma indicada, superior a dicho límite. Por tanto, para que pueda se aceptable una estrategia, ha de satisfacer la restricción

Parece más conveniente, en lugar de definir las reservas de solvencia U en términos absolutos como indicador de la solvencia de la entidad, definir el cociente $U/P = r$ al que denomiremos ratio de solvencia, en el cual P es el volumen de primas.(prima de riesgo más los recargos correspondientes).

"Variables relativas de esta clase con dimensión cero respecto de la unidad monetaria, no estan directamente afectadas por la inflación como las cantidades absolutas. Por ta razón son variables apropiadas para la predicción a largo plazo donde el valor del dinero no se supone constante"/7/

Tambien parece adecuada la definición del ratio de solvencia de acuerdo con la tradicional regulación legal del margen de solvencia.

En este caso la representación gráfica seria similar a la anterior, representando la barrera de ruina el margen de solvencia mínimo establecido legalmente.



Como ya indicamos, los objetivos del negocio asegurador son: maximización del beneficio, solvencia y expansión.

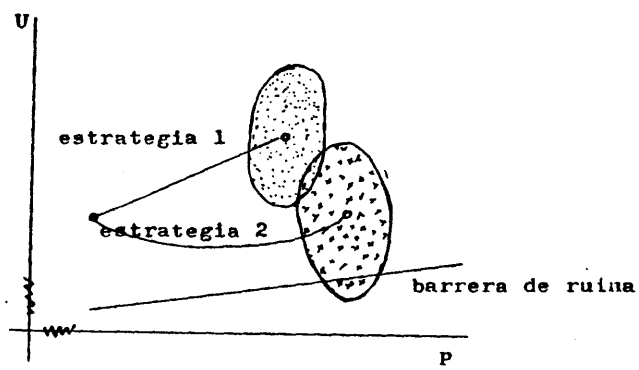
Una aproximación válida para nuestro modelo puede consistir en la elección de uno de los citados objetivos como variable principal. Esta o su utilidad habrán de ser maximizada, considerando el resto de los objetivos como variables secundarias para las cuales se fija un valor mínimo determinado.

Podemos, por ejemplo, considerar la expansión del negocio como el objetivo fundamental. Uno de los objetivos secundarios sería el mantenimiento de la solvencia de la compañía. Esto último puede ser realizado fijando un valor mínimo (quizá 10^{-3}) para la probabilidad de ruina, aceptando solamente aquellas estrategias cuya probabilidad de ruina no exceda el valor elegido. Otro objetivo secundario podrían ser los dividendos (y bonos). Para los mismos puede ser apropiado fijar un nivel satisfactorio o al menos tolerable para los accionistas. Tambien es posible tomar dicho nivel como uno de los parámetros de decisión, que puede tomar diferentes valores según las distintas estrategias.

Si consideramos como variables de estado únicas P y U de las que conocemos su valor inicial, la simulación del modelo nos dará el estado del negocio en el futuro (t=1,2...T) siendo la predicción de carácter estocástico.

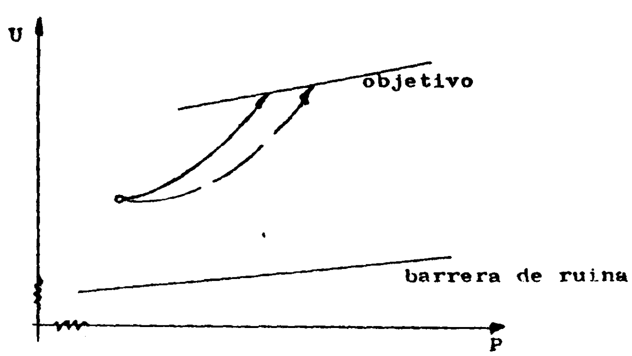
En la siguiente figura representamos los resultados de dos estrategias diferentes.

La razón del modelo, es encontrar aquella estrategia



que nos lleve a los objetivos fijados en la mejor forma posible. Este es un problema de programación dinámica.

Podríamos definir como objetivo una relación lineal apropiada para las variables U y P. El problema de maximización sería entonces encontrar la estrategia que nos dirige a esta linea (ver siguiente figura) en el punto de la misma más alejado posible del origen de coordenadas. Podemos incluir las restricción referentes a la probabilidad de ruina (ha de ser inferior a un límite prefijado) y los dividendos (se situen en torno a un nivel tambien prefijado).



Pentikäinen en su comunicación en el 21 Congreso Internacional de Actuarios distingue lo que llama "medida de solvencia dinámica" de la "medida estática" de la Teoría del Riesgo. La primera de ellas tiene en cuenta numerosos factores exógenos y el control dinámico establecido en el modelo, asi como el estado inicial del negocio.

La medida estática se construye suponiendo una cantidad inicial U_o de la reserva de riesgo, el horizonte temporal T y alguna otra condición inicial.

Si dos entidades tienen el mismo estado inicial, la - "probabilidad estática de ruina" es la misma para ambas. Si, sin embargo, una de ellas tiene una estrategia de fuerte expansión del negocio, a través de la colocación de una importante cantidad de recursos en gastos indicados anteriormente por la letra C, mientras que la otra entidad es más conservadora, utilizando sus recursos en el refuerzo de las reservas, la probabilidad dinámica de ruina será evidentemente mayor - para la primera que para la segunda.

No hemos de olvidar que las flucutaciones aleatorias no son,desde luego, la única clase de riesgo que afecta la actividad aseguradora.

De hecho la solvencia de una compañía aseguradora es un problema más complicado que la simple evaluación de la - fluctuación en las cantidades de siniestros. Pérdidas en inversiones, catástrofes naturales, malversación de los recursos son riesgos adicionales.

Variaciones en las probabilidades básicas y tendencias en la frecuencia de siniestralidad, asi como, la rentabilidad de las inversiones y la inflacción entre otros factores pueden convertir en inadecuados los precios y reservas, llegando su influencia a ser mayor que la fluctuación aleatoria ordinaria.

La reserva de riesgo como medida de la solvencia de una entidad aseguradora ha de ser completado con otras como - son el apropiado precio del servicio, la constitución de reservas técnicas y en otro orden la gestión y las circustancias del mercado.

III.3.4. Factores externos

III.3.4.1 Introducción del Mercado.

Para la construcción del modelo es de interés el conocimiento de cómo reacciona el mercado a medidas de competencia tales como cambios en las primas y los ya indicados gastos de promoción. Dichas medidas tendrán una influencia diferente en función del ramo en el que estemos interesados. El grado de saturación del mercado en un importante factor a tener en cuenta.

Las reacciones del mercado son, desde luego, descubiertas en base a la experiencia de situaciones reales.

El efecto de una medida de competencia nos vendrá dado por la correpondiente función de respuesta de ventas. Discutiremos la forma en que podemos llegar a una adecuada función que nos represente el incremento o disminución en el volumen de primas como consecuencia de una variación en las mismas.

Como una primera aproximación podemos plantear una simple función de respuesta de ventas de tipo exponencial. Sea por ejemplo /5/:

$$P(t) = P(t-1).(1 + g).(1 + \pi(t))^{-p} \qquad (1)$$

donde P(t) es el volumen de primas del año t, g es la tasa natural de crecimiento del negocio (nivel esperado sin el efecto de la competencia) y $\pi(t)$ es la disminución relativa de la prima (acción competitiva). p es el coeficiente de elasticidad (dato empírico) que viene dado por:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx p\,\pi$$

que nos indica la respuesta relativa de las ventas, esto es, el incremento en el volumen de primas debido a Π, en este caso es proporcional a Π, siendo p un coeficiente de proporcionalidad.

De hecho una reducción Π en las primas tiene un doble efecto: por una parte promociona nuevas ventas y por otra una cantidad ΠP es perdida en los ingresos por primas, al igual que del margen de beneficio. Este término ΠP, parece logico, tendría que ser restado en (1) para obtener el volumen actual de primas. Es sin embargo conveniente no hacerlo y considerar la reducción ΠP en cuenta como beneficio o pérdida.

Una función de respuesta algo más completa fue propuesta por Pentikäinen en un trabajo anterior /4/:

$$P(t) = P(t-1).(1 + g)(1 + \gamma(t))^{c}(1 - \Pi(t))^{-p} \quad (2)$$

donde $\gamma(t)$ representa el factor relativo de incremento de los esfuerzos de ventas para el año t, siendo c la elasticidad correspondiente

$$\frac{\Delta P}{P} \approx c$$

Esta última función parece apropiada para ser introducida en el modelo matemático estudiado anteriormente.

La respuesta exponencial de ventas es aplicable solo en un mercado abierto no saturado.

En lo que sigue estudiaremos y ampliaremos la función (1), en la que en forma simplificada hemos supuesto que la reducción de las primas con fines de competir en el mercado concierne al total del negocio de la entidad. Normalmente, - la mayoría de la compañías dedicadas a seguros no vida operan en diferentes tipos de seguros y modalidades, pudiendo restringirse la competencia a una parte del negocio.

Tambien en (1) se supone que la rebaja de primas es la única acción competitiva; una ampliación vendría dada en (2) que introduce los gastos extraordinarios de promoción.

Generalicemos nuestro análisis considerando tres grandes entidades a las que denominaremos C_1, C_2 y C_3, que operan en el mercado junto con cierto número de pequeñas compañías. Supongamos que estas últimas tienen una tarifa conjunta, por lo que pueden ser agrupadas en una única compañía C_4.

Será necesario conocer, al menos aproximadamente, el estado inicial y los parámetros de las compañías consideradas. Esto en la práctica es difícil, aunque podemos ayudarnos con las estadísticas oficiales publicadas por los organismos reguladores de la actividad aseguradora.

Aplicaremos la misma función (1) para todas las compañías C_i, $i= 1,2,3,4$. Las reducciones de primas $\pi_i(t)$ que la compañía i aplica en el año t son las variables de decisión. Las diferentes estrategias de competencia son obtenidas tomando diferentes valores de dichas variables. La matriz $(\pi_i(t))$ donde $i=1,2,3,4$ y $t=1,2,3,\ldots,T$ define la estratégia competitiva total.

Puede esperarse que el efecto competitivo sea proporcional a la diferencia en primas entre compañías, esto es, cuanto mayor sea la rebaja en las primas aplicada por la compañía i, may-or será el nuevo negocio que puede esperar.

De lo anteriormente expuesto la función (1) debe ser corregida mediante la introducción de las diferencias relativas en el nivel de primas. Dicha corrección se efectuará en la forma siguiente:

Sea

$$\bar{\Pi}(t) = \frac{1}{P(t)} \sum_{i=1}^{4} P_i(t) \ \Pi_i(t) \qquad (3)$$

el nivel medio ponderado del nivel de primas, donde $P(t) = \sum_i P_i(t)$ es el volumen de primas en el mercado. Entonces la reducción relativa de primas para la compañía i será:

$$\Pi_i'(t) = \Pi_i(t) - \bar{\Pi}(t) \qquad (4)$$

esta última variable reemplazará a Π en la función (1).

El beneficio o la pérdida que lleva aparejado la reducción de las primas ha de calcularse sobre la base de la reducción absoluta Π comparado con el nivel inicial $\Pi = 0$.

Todas las compañías tienen las mismas tasas iniciales esto es $\Pi_i(0) = 0$ para i=1,2,3,4. De aquí si todas las compañías reducen sus primas en la misma cantidad relativa, ninguna de ellas obtendrá un beneficio a causa de un incremento en el volumen de primas, sin embargo, todas ellas sufrirán una pérdida en los beneficios debida a las primas reducidas.

Generalmente los cambios en las primas $\Delta P_i(t)$ causados por alguna combinación de las variables $\pi_i(t)$ cumplen la relación

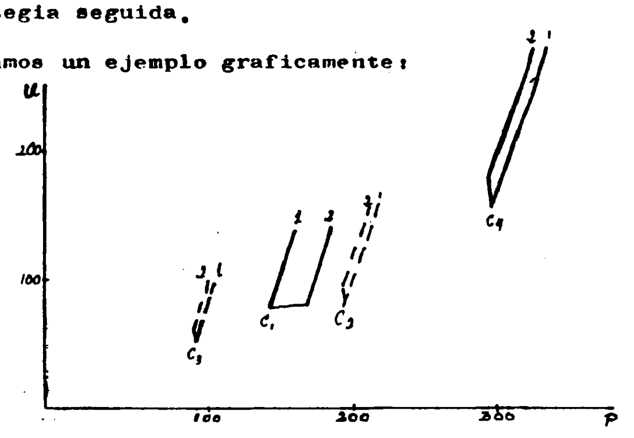
$$\sum_{i=1}^{4} p_i(t) \approx 0$$

Esta ecuación, donde Δ P es el cambio en los ingresos por primas (sin disminución alguna) es sólo aproximadamente válida; la relación $\Delta P/P = \pi . p$ es una aproximación. Una respuesta de ventas de este tipo es aplicable a mercados saturados donde una acción competitiva causa principalmente solo un incremento en la parte del mercado a expensas de las empresas competidoras. El análisis puede extenderse a mercados elásticos en los que una reducción de primas incrementa la demanda total de seguros.

Un factor $(1 - \bar{\pi}(t))^{-p'}$ puede ser incluido en la fórmula (1) para el propósito anterior.

En este momento podemos programar el modelo en el computador. La probabilidad de ruina, beneficios, perdidas y estado final de la compañía puede ser obtenida en función de la estrategia seguida.

Veamos un ejemplo graficamente:



El punto indica el resultado final de la estrategia cuyo número se especifica.

La estrategia 1 es neutral, no se aplica ningun tipo de reducción en las primas. Debido al crecimiento normal, - recordemos el factor g de la función (1) y teniendo en cuenta el recargo de seguridad de las primas, se producirá un - incremento tanto en las reservas como en las primas.

La segunda estrategia supone que la compañía C_1 reduce sus primas en un cierto porcentaje (en este caso el autor supuso un 15%) en el año t=1, no reaccionando el resto de las compañías a ello, esto es, sus reducciones son continuamente cero. Para t>1 todas las compañías cumplen $\pi_1(t) = 0$. En la grafica anterior podemos observar que la compañía 1 al final del período considerado (por ejemplo 5 años) tiene un incremento en el volumen de primas, mientras que las empresas competidoras sufren una disminución en las mismas y en el incremento de la reserva de riesgo.

Supongamos ahora que la compañía C_1 tiene como objetivo ser la mayor compañía del mercado consiguiendo un mayor volumen de primas que la compañía C_2, la mayor actualmente. Para conseguir este objetivo, puede experimentar con diferentes reducciones competitivas $\pi_1(1)$, aplicadas para un año solamente. El resto de las compañías no toman medida alguna.

Ya se estableció la importante relación que existe entre solvencia y precio. Es evidente que una reducción del - precio tendrá iinfluencia en la probabilidad de ruina de la entidad.

En la siguiente figura vamos a considerar el resultado de varias estrategias que puede tomar la entidad C_1, teniendo en cuenta la probabilidad de ruina al final del período considerado.

La simulación realizada por el autor supone las siguientes estrategias:

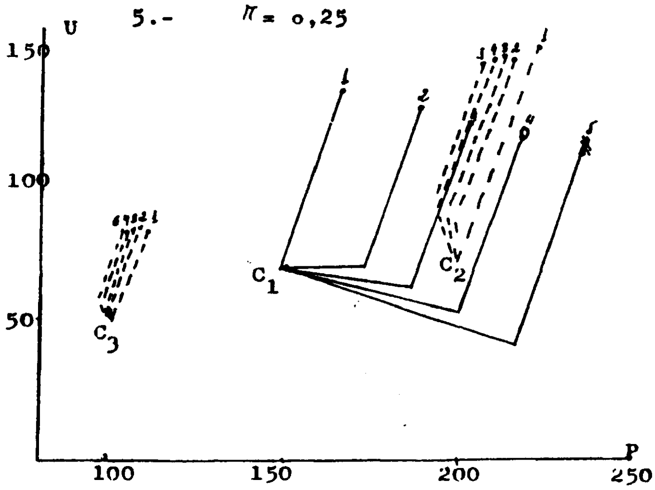
1.- $\pi = 0$

2.- $\pi = 0,1$

3.- $\pi = 0,15$

4.- $\pi = 0,28$

5.- $\pi = 0,25$



Los signos que acompañan el número de la estrategia nos indican la probabilidad de ruina:

. menor que 0,001 ∅ entre 0,01 y 0,05

O entre 0,001 y 0,01 # mayor que 0,05

Es evidente que la estrategia 5 da una probabilidad de ruina excesiva. La 3 puede parecer apropiada.

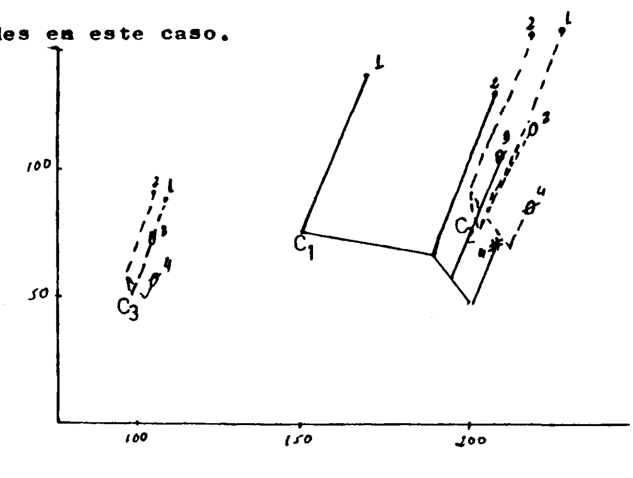
Supongamos que el resto de las compañías tambien toman diferentes estrategias competitivas:

La estrategia 1 supone que no se produce ninguna reducción en la primas por parte de las compañías

La estrategia 2 es la misma considerada en el caso anteriormente considerado: solo actua C_1.

En la tercera estrategia todas las demas compañías responden a la reducción de primas relaizando en el siguiente año igual reducción $\Pi_i(2) = 0,15$ $(i=2,3)$ y tambien la 1; - el resultado, como ya indicamos, será una reducción del beneficio en todas ellas. La compañía 1 se acerca a un estado de riesgo.

La cuarta estrategia supone que la reducción conjunta continuara para otro año más $(t=3)$, no habiendo mas reducciones en los dos años siguientes. La compañía 1 esta en graves dificultades en este caso.



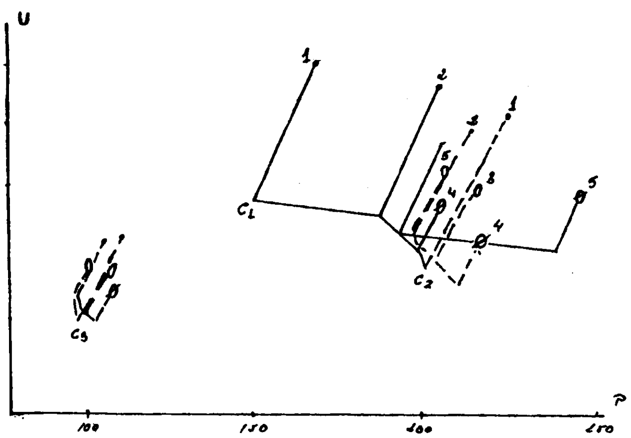
Supongamos la misma serie de estrategias indicadas, - sin embargo, la compañía 1 tiene una reserva de riesgo inicial mayor que la que poseía anteriormente. Sea por ejemplo 110 u.c (antes 75). Apliquemos las estrategias 1-4 .

Los mayores recursos iniciales poseidos p or la compañía 1 pueden permitir forzar a sus competidoras. Si su objetivo es un crecimiento ilimitado hará uso de sus relativamente grandes reservas para arrebatar una importante parte de - mercado a sus competidoras, ya que aquellas no pueden competir con la 1 mediante reducciones de precios por un largo periodo de tiempo sin poner en peligro su solvencia.

Plantearemos entonces una quinta estrategia en la cual las compañías 2 y 3 están obligadas, a causa del incremento de sus pérdidas, a no seguir con reducciones en los precios a partir del segundo período, mientras que C_1 continúa con ellas. La matriz de la estrategia será

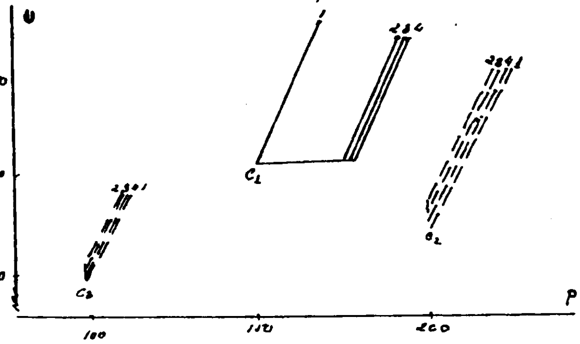
$$\pi_1(t) = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,15 & 0,15 & 0 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar en la siguiente representación gráfica, la compañía 1 cumple el objetivo fijado: ser la mayor del mercado, sin comprometer en gran medida la solvencia ya que la probabilidad de ruina al final del proceso no es excesiva.



Para terminar podemos experimentar con una función de mercados elásticos. Añadiremos el factor $(1-\pi)^{-p'}$ a la función (1). En este caso una reducción media de las tarifas incrementa el total de primas debido a la elasticidad p'.

Las estrategias son: 1.- neutral $\pi=0$, p=1,5 y p'=0 ; 2, 3 y 4 $\pi_1(1)=0,1$ y todas las demas $\pi_1(t)=0$. En el caso 2 p'= 0, en el 3 p'= 0,5, en el 4 p'= 1. Si p = p'= 1,5 , entonces P y U de las compañías 2, 3 y 4 tienen los mismos valores que en el primer caso, la accion de una compañía no tiene influencia sobre las otras; el mercado es elástico.



III.3.4.2. La inflación

Consideremos ahora la inflación y su efecto sobre el estado de la entidad aseguradora. Distinguiremos dos casos segun que la tasa de inflación sea constante para los diferentes períodos de tiempo o varíe en forma súbita de un año a otro.

Tasa de inflación estacionaria

El crecimiento real de la cartera es medido por la tasa de crecimiento i_g, que es definida como el crecimiento real en el volumen de primas P. De aqui, el incremento nominal de dicho volumen está compuesto de el incremento debido a la inflación y el incremento real.

Podemos expresar lo anterior en la siguiente fórmula:

$$P(t+1) = (1+i_x)(1+i_g).P(t)$$

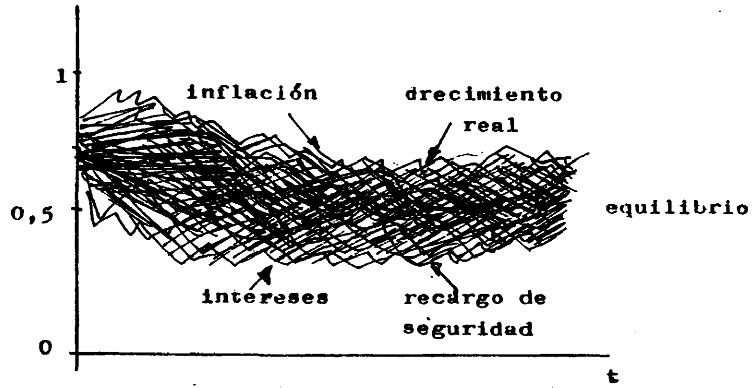
siendo i_x la tasa de inflación.

Estudiemos el efecto de la inflación sobre la solvencia de la compañía; para hacerlo , consideremos el ya definido ratio de solvencia r, cociente de las reservas de solvencia y el volumen de primas (U/P):

Consideremos el recargo de seguridad λ, constituido por el convencional recargo de seguridad incluido en las primas y el interés producido por las reservas que refuerza la ganancia del asegurador.

Además tendremos en cuenta los intereses, a una tasa i_n, añadidos al margen de solvencia.

Utilizando el Método de Montecarlo obtenemos (/7/) los resultados representados en la siguiente figura:



Podemos observar que la "banda" estocástica es esencialmente distinta a los resultados de la Teoría del Riesgo: normalmente la desviación típica y por tanto la anchura de la banda aumentan con el tiempo; es conocido que la probabilidad de ruina para un periodo de tiempo infinito, será menor que uno solamente si el ratio de solvencia tiende a infinito En nuestro caso la banda tiene un rango asintotico finito y u-n cierto nivel de equilibrio. Esto es debido a la influencia de los factores mencionados.

Como podemos observar en la representación grafica, existen cuatro factores en acción: 1.- la inflación, que reduce continuamente el ratio de solvencia ($r=U/P$) debido a que causa un incremento en el denominador del mismo. 2.- por la misma razon el crecimiento real tambien lo reduce, "tirando" hacia abajo de él. Por otra parte, 3.- los intereses al incrementar el numerador del ratio, hacen que este se incremente. 4.- igual efecto tiene el recargo de seguridad. El efecto combinado de inflación, crecimiento real y intereses es proporcional al tamaño actual del ratio de sol- vencia, mientras que el recargo de seguridad es proporcional al volumen de negocio. De aqui que en el sector superior de la figura, las anteriores fuerzas son intensas, siendo más débiles en el inferior; el efecto del recargo de seguridad por el contrario es siempre el mismo . Si el efecto multimplicativo conjunto de inflación y crecimiento real es mayor que el de los intereses

$$(1 + i_x).(1 + i_g) > (1 + i_n)$$

entonces hay siempre un cierto nivel de equilibrio donde éstas fuerzas son iguales. Si el valor del ratio de solvencia esta por encima del nivel de equilibrio, las fuerzas presionaran fuertemente hacia abajo y viceversa.

Por tanto la "banda"se comprime hacia el nivel de equilibrio, lo que explica la conducta del proceso.

De forma aproximada podemos decir que el crecimiento del negocio no-vida es 1,5 veces el crecimiento del producto nacional bruto. La tasa actual de inflación varia,según los diferentes paises, entre el 5 y el 15 p-or ciento. Podemos generalizar que el efecto multiplicativo de inflación y crecimiento real no supera a la tasa media de interés actualmente; con lo cual es válido el proceso indicado.

Podemos demostrar que el nivel de equilibrio es

$$Er = \lambda / (1 - v_{vn})$$

donde

$$v_{vn} = \frac{(1 + i_n)}{(1 + i_g)(1 + i_x)}$$

es el factor relativo del interes al crecimiento nominal de las primas.

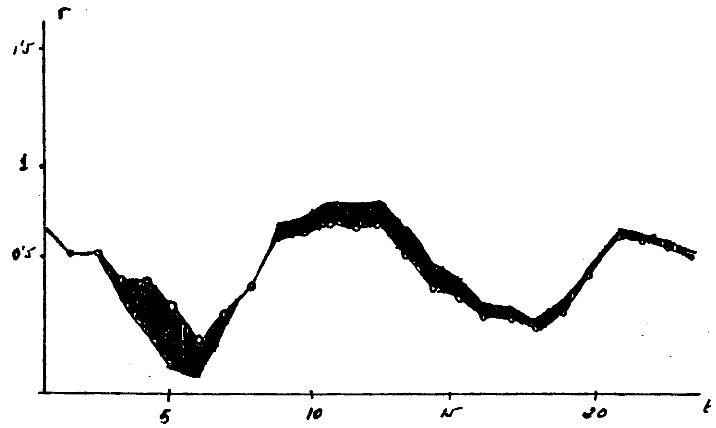
Variación súbita de la tasa de inflación

Producirá drásticos efectos en nuestro modelo. El efecto de una variación súbita de la tasa de inflación dependerá de como los siniestros y las primas reacciones a ella.

Normalmente si se produce un inesperado "shock" de inflación, las compañías aseguradoras no estarán suficientemente preparadas para cambiar las tasas de primas inmediatamente. Este efecto se incrementa por el hecho de que las primas se cobran al principio del período y corresponden, en el mejor de los casos, al nivel esperado de inflación para el período venidero. Si la tasa actual de inflación excede la esperada, los iniéstros y gastos se incrementarán inmediatamente mientras que las primas se corregirán despues de algún tiempo.

En la figura siguiente presentamos un ejemplo en el que el lapso de tiempo se supuso dos años. El autor generó solo una realización. La tasa de inflación fue variada y obtenido el proceso con los mismos números aleatorios generados.

La linea con círculos nos representa la realización - con una tasa constante de inflación . La linea sin círculos representa la realización en la cual se supone un súbito incremento de la tasa de inflación durante los años 3 y 4.



III.3.4.3. El ciclo del negocio.

Ya hemos comentado los diferentes tipos de variaciones en las probabilidades básicas que hemos de tener en cuenta en nuestro modelo.

La experiencia muestra que las variaciones de largo - plazo pueden tener una influencia significativa en el ratio de solvencia. Esta idea se refuerza al introducir dicha variación en el modelo: supondremos que las variaciones afectan al número de siniestros esperado. Podemos plantear la expresión:

$$n(t) = n(o)(1 + i_g)^t(1 + z_s(t))$$

donde $n(t)$ es el número esperado de siniestros en el período t, i_g el crecimiento real del negocio, que supondremos e constante y $z_s(t)$ es la variable ciclo que indica las desviaciones de la exposición media al riesgo de su valor normal. Esta variable se elegió de forma que su valor medio a largo plazo fuera cero.

$z_s(t)$ puede ser introducida en el modelo de diferentes formas, la más sencilla en suponerla determinista, quizá siguiendo una forma de seno:

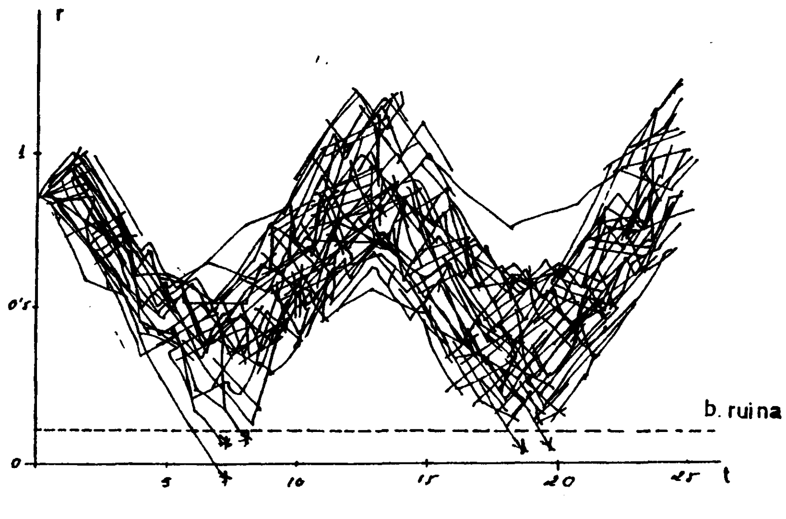
$$z_s(t) = z_m \cdot \text{sen}(wt + u)$$

donde z_m es la amplitud de onda y el coeficiente w la frecuencia

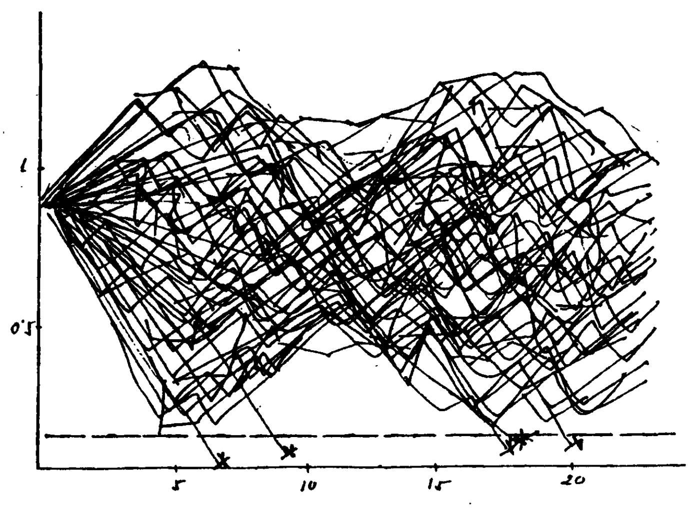
$$w = 2\Pi/T_s$$

siendo T_s la longitud de onda y u la variable de fase

Para una amplitud del 15% de la cantidad normal de si niestros y una longitud de onda de 12 años obtenemos la siguiente representación grafica:

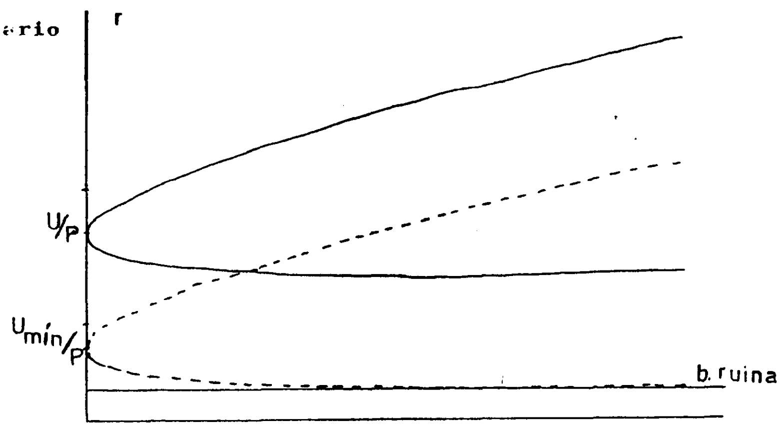


Si aleatorizamos la varible fase u tendremos:



III.3.5. **Mínimo ratio de solvencia requerido en diferentes supuestos.**

Consideremos la figura de la página 431 ; vamos a utilizarla para el cálculo del mínimo ratio de solvencia. Podemos mediante el uso del computador, mover el conjunto estocástico en dirección vertical hasta que toque la barrera de ruina estableciada. Entonces la posición inicial del ratio de solvencia nos indicará el mínimo margen de solvencia inicial necesario



Considerando diferentes factores, el conjunto estocastico será diferente para cada uno de ellos y por tanto - el ratio de solvencia mínimo variará.

Primero supongamos que el número de siniestros es la única variable aleatoria (ver /7/), siendo, por tanto, constantes el tamaño de un siniestro y todos los demas factores Como podemos esperar el ratio de solvencia mínimo será pequeño. En el trabajo citado calcula el autor un 9% de las - primas de propia retención de la compañía.

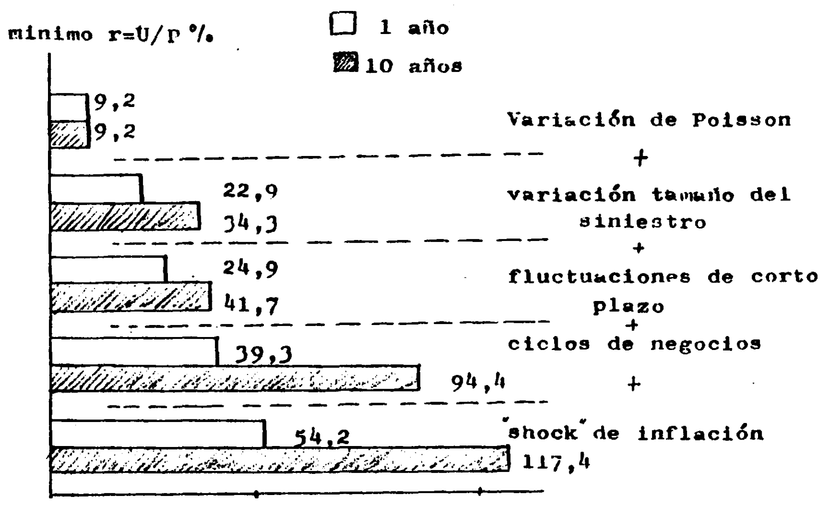
El siguiente paso es considerar aleatorio el tamaño de un siniestro.

Introducimos despues las variaciones en las probabilidades básicas de corto plàzo y el ciclo del negocio de seguros.

Para terminar consideramos un subito incremento de la inflación (pasa del 9% al 20% en el primer año).

Los calculos fueron realizados por el autor para un asegurador típico, cuyo tamaño, composición de la cartera y otras características se corresponden con una compañía media de seguros de Finlandia.

Los resultados obtenido son representados en la siguiente gráfica:



barrera de ruina = o,1.P

III.4 UN MODELO DESCRIPTIVO DEL NEGOCIO ASEGURADOR.

La idea de que la dirección del negocio de seguros debe estar basada en modelos matemáticos de la entidad aseguradora que consideren todos los factores relevantes actuando conjuntamente, reunió en septiembre de 1972 a varios especialistas en la materia en un seminario auspiciado por la fundación Filip Lundberg.

El modelo que presentamos a continuación fue planteado por Harald Bohman en dicho seminario, sirviendo como base a las diversas discusiones del mismo.(124)

Es un modelo descriptivo del negocio asegurador, pero en forma simplificada. Es constantemente alimentado con datos procedentes del mismo, que son usados por el modelo para estudiar su evolución. Nosotros esperaremos que dicha descripción sea una base apropiada para la toma de decisiones.

De acuerdo con el modelo el negocio esta dividido en una serie de "grupos de equidad", cada uno de los cuales esta formado por una serie de pólizas, refiriéndose la equidad al intento de control de la relación entre primas, siniestros y gastos administrativos desde ese punto de vista. Estos grupos han de presentar alguna clase de homogeneidad de riesgos. La división en grupos dependerá tambien de los recursos de que dispongamos para llevar a cabo el control de la equidad, a mayor número de grupos, mayores esfuerzos habrán de ser realizados para supervisar la equidad. Bohman indica que el número de siniestros en cada grupo ha de ser de al menos 25 anualmente.

De forma simplificada, supondremos que los activos de - la entidad corresponden a la suma de tres fondos técnicos: re serva de primas, reserva de siniestros y reserva de riesgo.

La reserva de primas se divide de acuedo con la división de los grupos, para los cuales es conocida.

La reserva de siniestros incluirá una estimación de los siniestros ocurridos pero no conocidos todavía y se dividirá en la misma forma que la de primas.

La reserva de riesgo (solvencia) es igual a la diferencia entre los activos de la compañía por un lado y la suma de las reservas anteriores por otro.

Tanto la reserva de primas, parte de las primas que los asegurados pagan por adelantado, como la reserva de sinies - tros, valor de los pagos futuros de siniestros ya ocurridos, no pueden ser consideradas estrictamente como propiedad de la entidad aseguradora. La reserva de riesgo sí vamos a considerarla en dicha manera. Este supuesto nos servirá para formular el objetivo de rentabilidad, aunque lo ajustado a la realidad del mismo dependerá de la legislación del pais en que - nos situemos.

Planteemos ahora los objetivos de la entidad aseguradora. Consideraremos básicamente tres:

1.- Rentabilidad; lo formularemos en la siguiente forma: Distinguiremos la rentabilidad del capital, esto es, la reserva de riesgo al final del período se habrá incrementado en un porcentaje con respecto a su valor inicial y el beneficio propio del negocio de seguro. Podemos fijar nuestro objetivo de rentabilidad por ejemplo en un 5% del valor inicial de la reserva y un 1% de los ingresos de primas del período.

Como es sabido, las características del negocio asegurador hacen que la reserva de riesgo fluctúe en el tiempo. En los períodos en los que dicha reserva es mayor que el valor prescrito por el objetivo de rentabilidad será posible una reducción general del nivel de primas para mejorar la situación competitiva de la entidad en el mercado.

2.- Equidad. Como se indicó antes, compararemos para cada grupo las primas con los siniestros, gastos administrativos y beneficio. Si coniciden aproximadamente podremos decir que la prima del grupo es equitativa.

Las primas son pagadas por adelantado, por tanto podrán en parte realizarse inversiones, los ingresos de dichas inversiones han de ser considerados. Los costos iniciales, comisiones y gastos para ventas, son normalmente pagados al principio del período de seguro. La compañía se compensará de estos costos colocando una cierta proporción de las primas durante su duración y usando estas partes de las primas para amortizar los costos iniciales. Este hecho ha de ser tenido en cuenta debidamente.

La siniestralidad es un proceso estocástico. Los valores observados de este proceso deben ser reemplazados por su correspondiente valor medio.

3.- Solvencia. La reserva de riesgo sera usada para compensar los resultados; a mayor reserva, mayor será la capacidad de compensación. Para la formulación de un criterio de solvencia, hemos de definir una medida de la peligrosidad de la cartera de seguros de la compañía. Esta medida debe ser comparada con la reserva de riesgo.

Bohman critica el criterio de solvencia formulado en la Teoría del Riesgo. Según dicho autor la solvencia es un estado que debería estar abierto a un examen anual. La Teoría del Riesgo Colectivo supone que si la reserva de riesgo es suficiente al comienzo de la actividad de la compañía, no es necesario un nuevo examen de la solvencia en caso de que el negocio de seguro represente un proceso estacionario en el tiempo. Esto no es muy realista en la actualidad.

III.4.1. Descripción del modelo

De forma simbólica el modelo puede ser representado mediante un conjunto de vasijas unidas por tubos. El flujo de agua entre las vasijas viene a representar un flujo monetario, simbolizando las vasijas las reservas técnicas y el nivel de agua la cantidad de dicha reserva.

Es un modelo dinámico que describirá la situación económica de la compañía y los cambios en la misma.

Como ya hemos indicado, la cartera estará dividida en grupos, que por alguna razón podrían ser considerades consistentes de riesgos homogeneos. Estos grupos constituirán las más pequeñas unidades de la cartera bajo constante supervisión desde el punto de vista de la equidad.

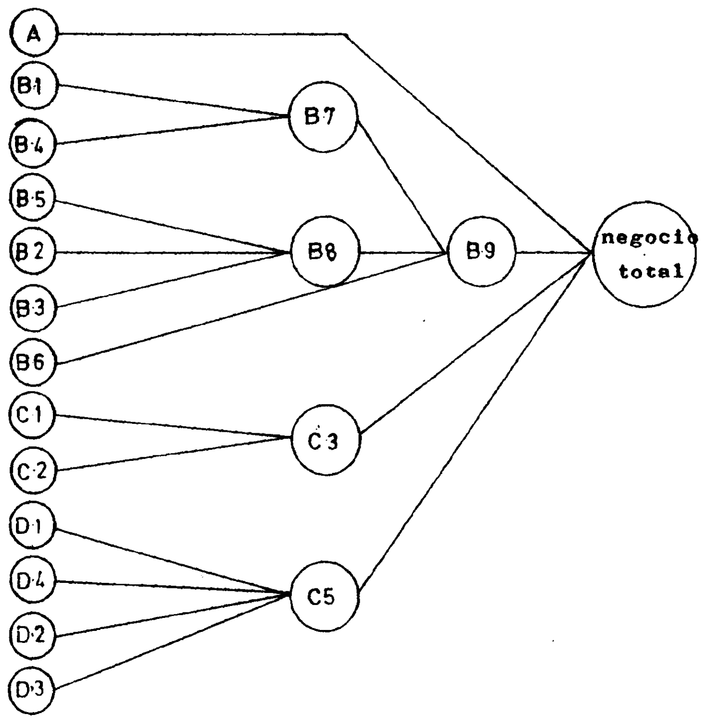
La división de los grupos y el número de grupos han de basarse tanto en la equidad como en consideraciones comerciales.

Un límite natural entre los diversos grupos de la cartera son los diferentes ramos en los que opera la entidad, aunque dentro de cada uno de ellos existan lógicamente más subdivisiones.

Para hacer posible el control de la equidad es necesario que los diversos grupos no sean demasiado pequeños. El problema de la equidad referido a una póliza individual no tiene sentido.

Entre los diversos grupos de la cartera hay un cierto sistema estático. El hecho es que cada grupo puede ser considerado como una parte de un grupo mayor consistente de dos o más grupos. La figura de la siguiente página nos representa este hecho. Una utilidad de este planteamiento puede verse cuando tratamos de establecer la prima de un grupo del que no tenemos suficiente información, en este caso referiremos el grupo al del nivel superior del cual es una parte.

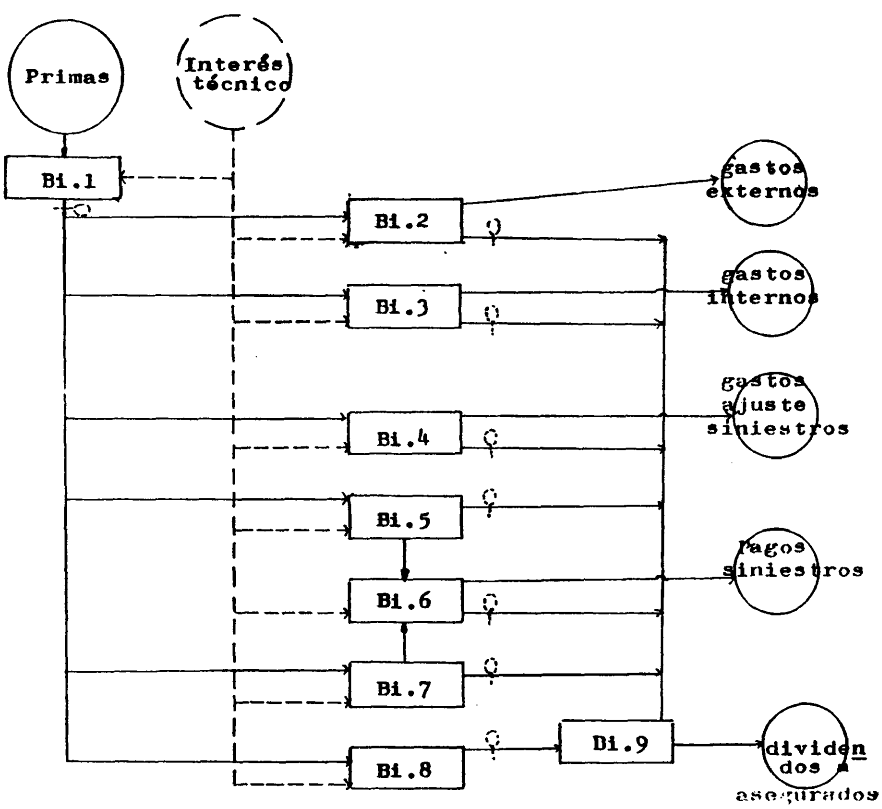
Algunas dificultades práticas hacen necesario construir el sistema de "vasijas" de forma diferente para las distintas lineas del negocio. En reaseguro aceptado la compañía solo tendrá los datos que la cedente le de, no ocurre asi en el negodio directo donde podremos obtener los datos que deseemos. Por esta razon dividiremos la compañía en las seccio-



nes: negocio directo, reaseguro aceptado y reaseguro cedido. Dento de cada sección haremos una división en grupos homogéneos. En la sección de reaseguro aplicaremos una versión simplificada del sistema de vasijas.

Junto al negocio de seguro tendremos tambien la sección financiera que se ocupará de los problemas de las inversiones de la compañía.

Cada grupo dispone de un fondo técnico, que nos dará unos ingresos de inversiones, auque supondremos que el tipo de

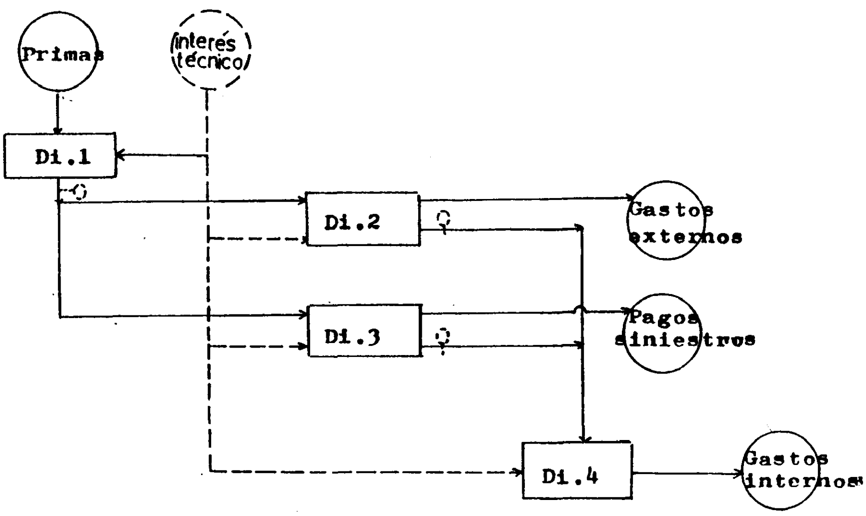


Negocio Directo

interés técnico es el mismo para todos los grupos.

Para la sección financiera el tipo de interes técnico representará un gasto. El resultado de la sección financierá será por lo tanto la diferencia entre los ingresos de las inversiones actualmente obtenidos por la misma y el interés técnico de los grupos.

La representación del sistema de las diferentes secciones es la de las gráficas de la presente página y las siguien



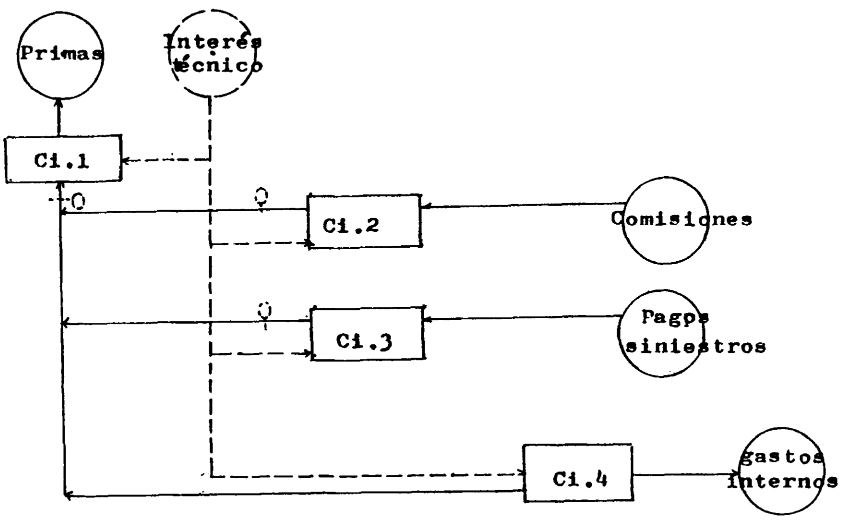
Reaseguro aceptado

tes. Las notaciones serán explicadas más adelante. La letra i se refiere a los grupos.

Cada vasija tiene una serie de entradas y de salidas.

En general las entradas serán las de primas e interés - técnico y las salidas pagos de siniestros y los diversos gastos internos y externos del negocio de seguros.

El flujo en el sistema esta controlado por unas valvulas insertadas en diferentes puntos. Las válvulas simbolizan las reglas de acuerdo a las cuales el "nivel de agua" es controlado. Por ejmemplo para Bi.1 que representa la reserva de primas en el negocio directo, la válvula simboliza la regla que nos sirve para calcular dicha reserva, como ya indicamos,



Reaseguro cedido

metodos forfait o prorrata témporis.

III.4.2 Funcionamiento del modelo.

Nos referiremos solamente al seguro directo ya que el sistema del reaseguro es igual que el anterior con algunas modificaciones.

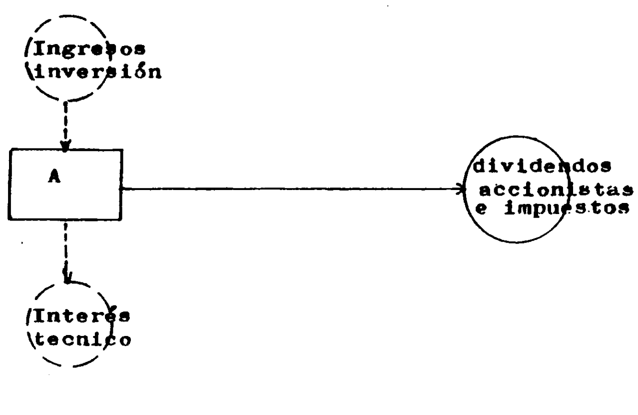
La reserva para primas esta representada por la "vasija" Bi.1, como hemos indicado, Todas las primas son llevadas a ella, lo mismo que el interés técnico que estará en proporción a la magnitud de su contenido en el momento actual. El significado de su correspondiente válvula ya lo hemos explicado.

En este modelo el interés técnico forma parte de las primas a difrencia de lo considerado tradicionalmente.

Las flechas indican la dirección positiva del sistema.

Una flecha dirigida a la vasija indicará que un flujo positivo se dirige a la misma, aumentando el nivel de la misma. De la misma forma si la flecha parte de la vasija, disminuirá el nivel de la misma. Si el nivel de la vasija es negativo, el flujo de interés técnico cambia de dirección.

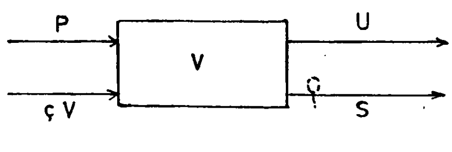
La vasija Bi.6 corresponde a la reserva de siniestros. Las entradas son de interés técnico y la cantidad de siniestros ocurridos. Incluirá una estimación apropiada de los siniestros ocurridos pero no conocidos todavía, al estudiar la periodificación del sistema ya hicimos referencia a ellos. - La salida corresponde a los pagos por siniestros. La válvula corresponde a los métodos utilizados para estimar el tamaño actual de dicha reserva. El flujo de salida regulado por la válvula corresponde al beneficio o la pérdida.



Sección financiera

Las "vasijas" Bi.2, Bi.3 y Bi.4, representaa los diferentes costos de ventas y administración, a los que llamaremos gastos internos, gastos externos y gastos para ajuste de siniestros.

Supongamos que el nivel de la vasija es V. La parte de las primas que cubre los correspondientes costos y es llevada a la correspondiente vasija es denotado por P, los gastos actuales por U, y el beneficio por S. Finalmente la tasa de interes será denotada por ç. Una representación puede ser la siguiente:



El tamaño de S es controlado por la válvula que simboliza la elección de un parametro q, usado para controlar el tamaño de S.

Podemos describir la administración de la vasija por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial V}{dt} = çV + P - U - S$$

$$\frac{dV}{dt} = - qV - U$$

Los parámetros ç y q asi como P y U que son funciones de t son comocidos. Obtendremos de estas ecuaciones los valores de V y S que tambien son función de t.

Veamos como elegiremos q para los gastos externos. En - una cierta linea de negocio y durante un cierto año, los gastos externos actuales ascienden a k. Podemos prever que la correspondiente cartera se mantendrá durante un cierto periodo T. Durante dicho año los costos actuales son tomados de la vasija correspondiente. La vasija se incrementará en K. La idea del modelo es que los gastos actuales deberián ser reemplazados por los gastos calculados en que incurriran durante el -- mismo perídodo de tiempo dichas pólizas. Este costo calculado es igual a P - S que de la primera ecuación diferencial obtenemos que es igual a -(q + ç) V. Los costos calculados son por tanto iguales a una distribución de los gastos actuales en todo el período de tiempo, durante el cual V es menor que cero. De la segunda ecuación se sigue que si V es igual a -K en el tiempo t=0, será igual a -K e^{-qt} en el momento t. Un valor apropiado de q será q = 1.4/T, significando que V es igual a -K/2 en el momento T/2.

Un ejemplo respecto de los gastos internos sería la compra de un computador con un costo K del que podemos prever tenga utilidad durante un periodo de tiempo T.

Para Bi.4 (gastos de ajuste de siniestros) supondremos que estos gastos están directamente relacionados al volumen de siniestros pendientes y al tiempo para fijarlos. Es por tanto mejor combinar la estimación de los futuros gastos para ajustar siniestros con la estimación de los futuros pagos por siniestros ya ocurridos que usar una fórmula matemática mecánica.

Si la reserva para gastos de ajuste de siniestros se calcula de esta forma en intervalos regulares de tiempo, conoceremos el valor de V y de dV/dt y como consecuenca S sera igual a:

$$S = P - U + dV/dt + \varsigma V$$

Bi.7 representa la reserva de equilibrio para los siniestros grandes, podriamos describir su administración presentando las reglas de acuerdo a las cuales se calcula para cada momento del tiempo. Para una mayor claridad mostraremos el aspecto de equilibrio del proceso. Para cada linea de negocio elegiremos una unidad monetaria y una unidad de tiempo M y T respectivamente. El equilibrio lo realizaremos distribuyendo cada siniestro individual sobre un cierto período de tiempo: si tememos un siniestro de X M, lo distribuiremos sobre un período de tiempo de longitud XT. En lugar de un siniestro de tamaño X M tendremos un siniestro de cantidad M durante X periodos de tiempo. El intervalo se elegirá de forma que el punto medio del mismo sea igual al tiempo de ocurrencia del siniestro. La elección de M y T dependen de la frecuencia de siniestralidad del proceso. Si la frecuencia de siniestralidad es igual a N siniestros por unidad de tiempo T y m es el siniestro medio expresado en unidades monetarias M, desearemos que N.m sea al menos igual a 400 para conseguir el equilibrio del proceso, puede demostrarse que el proceso de riesgo para los siniestros grandes equilibrado de esta forma posee propiedades similares a un proceso de Poisson. Esperaremos un número de siniestros de igual cantidad de 400 por T.

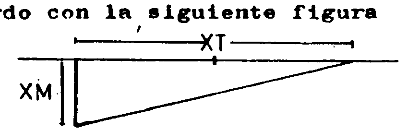
Esto es cierto si nos referimos a la media y desviación típica del proceso. El proceso equilibrado tendrá una desviación típica por T del 5% de la media por T.

El cálculo de la reserva de equilibrio Bi.7 es sencillo: cada siniestro individual contribuirá a la misma con una cantidad negativa que varía de -X a cero durante el intervalo de longitud S en el que el siniestro es distribuído.

La ecuación diferencial será en este caso:

dV/dt = çV - P - U - S

donde P es la parte de las primas que se utiliza para cubrir los grandes siniestros, U la cantidad actual de siniestros ocurridos. Estas cantidadades son llevadas a la reserva de siniestros. La contribución a V de cada siniestro individual se hará de acuerdo con la siguiente figura



es facil conocer V en el tiempo T,por tanto. En cuanto a S, diferencia entre el costo esperado de grades siniestros y el correspondiente costo equilibrado de siniestros ocurridos será

S = P - U + dV/dt + çV

Bi.5 es la reserva de equilibrio de pequeños siniestros En canto a esta parte del proceso de riesgo, pequeños siniestros, la varianza es esencialmente de Poisson. Esto significa que la varianza debida al hecho de los diferentes tamaños de siniestro es de menos importancia que la debida a los diferentes números de siniestros en los distintos períodos. En la práctica el número esperado de siniestros por unidad de tiempo es tan grande que la varianza debida al diferente número de siniestros es de poca importancia. La razon principal para la variación de la cantidad total de siniestros sera, por tanto, las tendencias. Al ser observadas han de ser variadas consecuentemente las primas. Esto nos lleva a la conclusión de que ninguna acción ha deser emprendida en lo que concierne a los peqeños siniestros. Sin embargo hay exdepciones, por ejemplo un incrementeo en la siniestralidad que se considere puramente aleatorio y no indicativo de una tendencia. En estos casos Bi.5 deberá disminuir, y habrá que fijar un período de tiempo para que se incremente hasta cero. En resumen Bi.5 tendrá un nivel cero normalmente salvo en períodos de excepcional acumulación de siniestros en que sera negativo.

Bi.8 representa la provisión para siniestros catastróficos, todavía no ocurridos. El exceso de las prima sobre costos para siniestros, administración y pequeños y grandes siniestros se transfiere a Bi.8. En función de la situación de la línea del negocio una parte mayor o menor de estas primas será transferido al fondo de beneficio. Una forma apropiada de hacerlo es fijar un porcentaje anual y transferirlo de Bi.8 a Bi.9. Dependiendo de la distribución del riesgo el porcentaje es mayor o menor, si no hay razones para esperar siniestros catastróficos dicho porcentaje sera alto.

III.4.3. El control de la equidad

Ya dijimos que consideramos una prima equitativa si se corresponde con la suma de siniestros gastos y bneficio.

Las primas son normalmente pagadas en momentos discretos del tiempo, una vez al año. Considerando el efecto del interés, podemos transformar el pago de primas en un proceso - continuo, donde la acción de la prima en el momento t será - p(t). Tambien algunos gastos nacen en momentos concretos del tiempo, considerando el tipo de interes denotaremos la acción de los gastos en un momento t por e(t).

El proceso de riesgo se caracteriza por el número de - siniestros y el tamaño de cada siniestro individual. Un proceso continuo será caracterizado por la acción de la siniestralidad en el momento t , c(t); c(t) dt es igual a la cantidad esperada de siniestros en el intervalo de tiempo (t,t+dt).

Existirá equidad si p(t) - c(t) - e(t) es aproximadamente igual a la acción del beneficio que demandamos para el grupo en cuestión de acuerdo a nuestro objetivo de beneficio, consideraremos entonces que el nivel de prima es equitativo.

El modelo nos debe proporcionar estas funciones.

La función p(t) es igual al flujo de dinero que sale de Bi.1. Esta corriente se divide en seis, tres dirirgidas a Bi.2 Bi.3 y Bi.4 correspondientes a los distintos gastos, los tres restantes se dirigen a los pequeños, grandes y catastróficos - siniestros. De las vasijas Bi.2 a Bi.8 una corriente de beneficio se dirige a Bi.9. Esta corriente es igual a p(t) - c(t) - e(t). El criterio de equidad puede ser establecido -

en la siguiente forma: si el flujo de Bi.9 que proviene de Bi.2 - Bi.8 es aproximadamente igual a la tasa de beneficio que hemos fijado como objetivo, entonces consideraremos que el nivel de primas es equitativo. La utilidad de este criterio es la de fijar el precio de las primas en la forma más correcta desde el punto de vista de la equidad.

III.4.4. El control de la solvencia

Como ya indicamos antes, consideraremos que la solvencia de la compañía va unida con el tamaño de la reserva de riesgo. Supusimos que los activós de la compañía son igual a la suma de la reserva de primas, reserva de riesgo y reserva de siniestros. En términos de nuestro modelo el total de activos es igual a

$$A + \sum_i \sum_k Bi.K + \sum_i \sum_k Ci.K + \sum_i \sum_k Di.K$$

siendo la reserva de primas

$$\sum_i Bi.1 + \sum_i Ci.1 + \sum_i Di.1$$

y la reserva de siniestros

$$\sum_i Bi.6 + \sum_i Ci.6 + \sum_i Di.6$$

Restando la reserva de primas y la reserva de siniestros al total de activos obtendremos la reserva de riesgo.

Para hablar de la solvencia de la compañía no es, sin embargo, suficiente el conocimiento de la resefva de riesgo. La reserva de riesgo debe ser comparada con la estructura del negocio de riesgo de la compañía. Recordemos en este punto lo dicho en anteriores capítulos.

El autor del trabajo critica la clásica aproximación - al problema de la solvencia a través del cálculo de la probabilidad de ruina. En síntesis es: supongamos una compañía que inicia su actividad con un reserva de riesgo en el tiempo t=0 y calcula la probabilidad de que la compañía no se arruine -- antes de T. Para Bohman en caso que T sea mayor de un año la formulación del problema es bastante irrealista, ya que se basa en el supuesto de que una vez conocido el valor de la reserva de riesgo inicial, el proceso de riesgo no se inspecciona hasta el momento T. Realmente en la práctica la compañía y el proceso de riesgo están bajo constante supervisión. Tambien la clásica teoría del riesgo supone que el proceso de riesgo es estacionario, supuesto poco realista para el autor. Por estas razones la teoría del riesgo y la aplicación de las probabilidades de ruina no será usado como un criterio de solvencia.

Una mejor aproximación es suponer que la solvencia de - la compañía es revisada una vez al año. Asi,estimaremos la - siniestralidad que preveemos p-ara el siguiente año ayudandonos de la distribución de la siniestralidad total, tambien estimada, $F(x)$. Elegiremos un x_o de acuerdo con la ecuación $F(x_o) = 0{,}99$ por ejemplo. Esto significa que de acuerdo a nuestra siniestralidad total estimada para el año que viene, la probabilidad de que sea menor que x_o es o,99. Si la reserva de - riesgo más las primas de riesgo durante el año que viene son mayores que x_o tendremos una probabilidad del 0,99 de hacer frente a los siniestros. En este caso la compañía será considerada solvente. Este criterio es usado en algunos paises, por ejemplo, en Findlandia.

La introducción del reaseguro nos ayudará al cumplimiento de la condición de solvencia, en este punto, nos remitimos a lo dicho al respecto en el capitulo correspondiente al subsistema de estabilidad.

En nuestro modelo, el reaseguro servirá para conseguir lo que se suele llamar "cartera equilibrada" esto es que un siniestro individual sólo ha de representar una relativamente pequeña parte del volumen anual de primas de la cartera.

Para completar el control de la solvencia, hemos de tener en cuenta el riesgo de acumulación, no considerado hasta ahora. Como una parte del test de solvencia, hemos de tratar de estimar dicho riesgo y por tanto cuidar de que la reserva de riesgo sea capaz de cubrir tambien tal riesgo de acumulación.

III.4.5. El control de la rentabilidad.

El objetivo de rentabilidad fue definido en la siguiente forma: la reserva de riesgo se incrementará con el interés y tambien con una contribución del negocio de seguro igual a un cierto porcentaje de los ingresos de primas. Supongamos por ejemplo que prescribimos que la reserva de riesgo se incrementará en el porcentaje del interés técnico usado en el modelo y que la contribución del negocio de seguro será del 1% de las entradas por primas. Podremos entonces proyectar el incremento de la reserva de riesgo de acuero a este -

objetivo. Es evidente que la siniestralidad causará fluctuaciones en la reserva de riesgo. En momentos en los cuales la reserva de riesgo es inferior al valor obtenido de acuerdo al objetivo de rentabilidad, deberán ser incrementadas las primas (consideremos tambien las posibilidades del mercado), que podrán ser disminuidas en caso contrario. Vemos como el objetivo de rentabilidad elegido influye en el nivel de primas.

III.4.6 Utilidad del modelo para analizar el resultado del negocio asegurador.

Es normal que las entidades aseguradoras cumplimenten un informe anual según la regulación legal de la actividad aseguradora.

Por otra parte es necesario que la entidad realice un análisis técnico de carácter interno, de mayor profundidad que el anterior, sobre la situación de la entidad. El principal propósito de este análisis técnico será el conocimiento de lo apropiado del nivel de primas de la compañía.

Al realizar dicho análisis supondremos que el negocio esta dividido en cierto número de lineas de seguro. Para cada una de ellas, el mismo debe darnos la confirmación de que el nivel de primas es suficiente o avisar de su insuficiencia.

Existe una característica del negocio asegurador que hemos de tener en cuenta: el asegurado paga una prima anual al principio del año. Es necesario distribuir la prima durante dicho período de tiempo. Por otra parte las comisiones y otros gastos de adquisición de nuevas polizas de seguro presentan un problema parecido. Estos costos nacen al principio del período de seguro, mientras que las correspondientes contribuciones de los asegurados se obtienen de las primas pagadas por los mismos durante el período en que permanezcan asegurados.

En la figura de la siguiente página repetimos la representación del modelo con diferentes notaciones e incluyendo los flujos monetarios relevantes en el presente contexto.

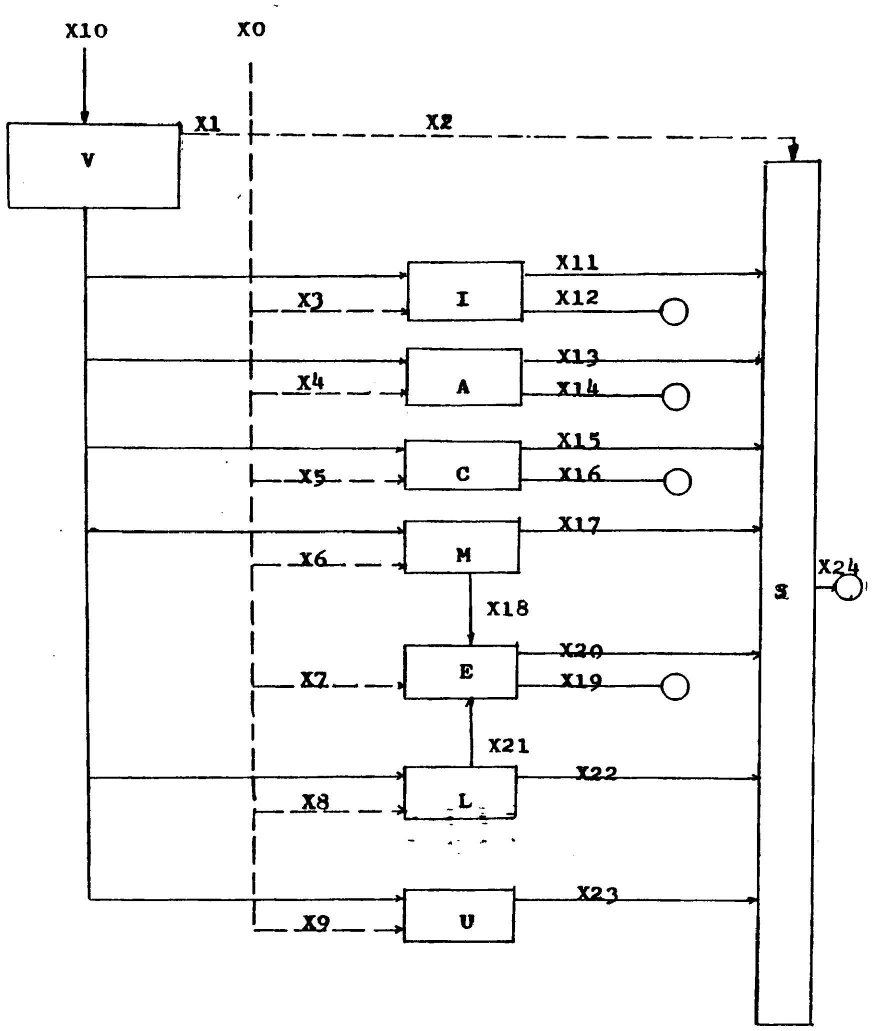
Partiremos de la relación que expresa que las totales entradas de flujo menos lassalidas es igual al incremento neto de la vasija. Expresaremos todas las relaciones en forma de ecuaciones diferenciales. Asi V'sera la derivada de V, etc. Estas ecuaciones diferenciales podrían ser transformadas en ecuaciones en diferencias.

$$X10 + X0 - X12 - X14 - X16 - X19 - X24 =$$

$$= V' + I' + A' + C' + M' + E' + L' + U' + S'$$

En esta relacion hemos denotado por X0 la cantidad total de interés de las reservas técnicas. El flujo de interés es dividido entre las "vasijas" en X1,....,X9. Es logico que X0 = X1 +......+ X9.

Para el análisis técnico,la relación mencionada arriba presentamos en la siguiente forma. (continúa pág 477)


X10
X0
X1
X2
V
I
A
C
M
E
L
U
S
X3
X4
X5
X6
X7
X8
X9
X11
X12
X13
X14
X15
X16
X17
X18
X20
X19
X21
X22
X23
X24

Primas	(X10 - V′+ X1)
Costos iniciales	-(X12 + I′- X3)
Costos administración. . .	-(X14 + A′- X4)
Costos manejo siniestros	-(X16 + C′- X5)
Pequeños siniestros. . . .	-(X18 + M′- X6)
Grandes siniestros	-(X21 + L′- X8)
Costos estimados, siniestros catastróficos	-(U′- x9)
Pérdidas	-(X19 + E′- X7 - X18 - X21)
Beneficio negocio seguro	(S′- X2 + X24)

Hemos definido la reserva de primas para cada póliza de seguros como la parte de la prima brutas . En gneral, - como ya hemos visto, la reserva de primas es una parte do la prima neta, esto es, la prima bruta menos los gastos externos (gastos iniciales en este caso). Denotaremos la diferencia entre la reserva de primas caculada sobre la prima neta y la calculada sobre la prima bruta por S_1.

Es comun que cierto recargo de seguridad se añada a la reserva de primas. Lo denotaremos por S_2.

La reserva de siniestros pendientes, E, es igual al valor estimado de futuros pagos por siniestros ya ocurridos. Si añadimos un recargo a esta reserva, lo denotaremos por S_3 S_1, S_2 y S_3 son partes de S. El resto será S_4. Luego:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

Podemos presentar el informe anual de forma análoga a -

la del análisis técnico. Tendremos:

Primas X10

Interés. X0

Costos iniciales . . . . -X12

Costos administrativos . -X14

Costos manejo siniest. . -(X16 + C')

Pagos siniestros . . . . -X19

Incremento neto de la reserva de primas . . . . $-(V' + S_1' + S_2')$

Incre. neto reser.siniest.$-(E' + S_2')$

Dividendos, impuestos.. .-X24

Beneficio . . . . $I' + A' + M' + L' + U' + S_4'$

El bneficio no es el mismo que el obtenido en á análisis técnico. La diferencia vendrá dada por la expresión:

$$I' + A' + M' + L' + U' - S_1' - S_2' - S_3' + X2 - X24$$

que pude ser presentada en la forma:

Diferencia entre costo estimado y registrado

.......$(I' + A' - X3 - X4 - X5 - S_1')$

Equilibrio de riesgo interno ....$(M' + L' + U' - X6 - X8 - X9)$

Incremento recaggo incluido reservas $-(S_2' - S_3')$

Intereses sobre beneficio acumulado. X2+X3+X4+X5+X6+X8+X9

Dividendos, impuestos etc. -X24.

418 bis

IV.

C O N C L U S I O N E S

En el presente trabajo de Tesis Doctoral, hemos realizado un intento de estudio de la empresa de seguros no vida sobre la base metodológica proporcionada por el enfoque de sistemas.

La comprensión de la empresa como un sistema complejo, formado por diversos sistemas parciales (subsistemas) tiene como fin llegar a la coordinación necesaria en orden a conseguir que sus operaciones sean las ade-cuadas y ocurran en el momento oportuno.

En un primer momento procede la identificación de los flujos materiales, energéticos y de información. En la empresa aseguradora no existen flujos materiales propiamente dichos, ya que su ámbito interno lo constituye la técnica actuarial; destacándose por su naturaleza los flujos de información.

Asimilando la empresa a un organismo vivo, se desprende que su actividad ha de ir dirigida a su supervivencia y desarrollo en un medio ambiente cambiante que le obliga a ajustar continuamente su comportamiento. El sistema de información ha de satisfacer las demandas de los centros de decisión, proporcionándoles la información precisa en cada momento; comunicando asimismo los elementos internos de la empresa, dándoles cohesión y relacionándoles con su entorno con la finalidad de de conseguir su adaptación al mismo.

+ + + + +

El peculiar proceso productivo de la empresa aseguradora, la diferencia fundamentalmente de las empresas industriales, enmarcándola dentro de los intermediarios financieros: en las modalidades de seguros no vida, el vencimiento medio de las primas es anterior al vencimiento medio de las obligaciones por siniestros, por tanto se produce una retención de liquidez del sistema, lo que proporciona a la empresa unos recursos cuya inversión se encuentra condicionada por las características de los mismos.

+ + + + +

El desarrollo de los estudios actuariales sobre el tema que nos ocupa, hasta el presente momento, se caracteriza por las siguientes notas: en primer lugar se ha prestado gran atención a estudio del negocio de riesgo, que se pone de manifiesto en el elevado número de monografías y publicaciones periódicas que al mismo se han dedicado, destacandose la general aceptación de la Teoría del Riesgo Colectivo. Paradojicamente hemos de señalar la escasa aplicación práctica de la misma. En segundo lugar, el desarrollo técnico de las distintas actividades funcionales de la empresa aseguradora (cálculo de primas, elaboración de tarifas, reservas técnicas, inversiones etc.) ha sido parejo al de los estudios teóricos. sobre las mismas.

Por otra parte, hemos de destacar la tardía incorporación de las concepciones interdisplinares, lo que ha provocado su escaso desarrollo en el campo del seguro. Asi, la Investigación Operativa se ha considerado,en la mayoria de los trabajos,como una serie de métodos análiticos (programación matemática, análisis lineal, teoría de la credibilidad....) sin tener en cuenta su carácter de integración de actividades. En este punto hemos de destacar las aportaciones sistémicas de los profesores Nieto de Alba y Vegas Asensio.

\+ + + + +

Como hemos indicado, la Teoría del Riesgo Colectivo nos proporciona un modelo ampliamente aceptado para el estudio del negocio de riesgo: considerando que las operaciones de seguro son de naturaleza aleatoria, surgen fluctuaciones de dicho carácter que afectarán al mismo; la citada Teoría estudia el efecto de estas fluctuaciones sobre el negocio de riesgo como un todo. Por otra parte, permite integrar los elementos básicos del mismo: recargo de seguridad, reaseguro y reservas de estabilidad, que constituyen las tres variables de decisión sobre las que podremos actuar para prevenir las fluctuaciones mencionadas.

Sin embargo, la consideración global de la empresa aseguradora, pone de manifiesto que la estabilidad de la empresa de seguros, esencial en la misma, depende no solamente de la del negocio de riesgo. El carácter aleatorio de las actividades realizadas en el seno de la empresa ha de influir su estabilidad. Se plantea, por tanto, la integración de la actividad estrictamente aseguradora con el resto para poder llevar a cabo un estudio global de la estabilidad de la empresa. Nosotros hemos presentado un modelo integrador del negocio de riesgo e inversión con este propósito.

+ + + + +

En nuestro análisis del sistema asegurador, hemos procedido primeramente a estudiar los diversos sistemas parciales que lo componen, estableciendo los adecuados modelos para la toma de decisiones en los mismos. Se plantea el problema de armonizar los objetivos de los sistemas parciales en orden a la consecución de los del sistema total. El conocimiento de las principales interrelaciones entre los distintos elementos del sistema empresa y el establecimiento de un orden de preferencias por parte del empresario ha de conducirnos a su resolución.

Finalmente, hemos pretendido establecer un modelo global del sistema asegurador apto para la toma de decisiones:

La Teoría del Riesgo Colectivo nos proporciona un modelo, a nuestro entender, insuficiente para este propósito. Dicha insuficiencia se manifiesta en que considera únicamente el negocio de riesgo, sin tener en cuenta el peso específico que el resto de las actividades que se realizan en la empresa tendrán en el resultado de la misma; por otra parte, supone la posibilidad de una acumulación ilimitada de reservas que contradice la práctica habitual de distribuir parte del beneficio en forma de dividendos.

La programación dinámica ha sido fecundamente empleada para el planteamiento y resolución de problemas de decisión secuencial en la empresa de seguros. En esta linea hemos de destacar las que, a nuestro entender, constituyen las aportaciones más importantes realizadas hasta el momento: las de Karl Borch y Tievo Pentikäinen.

El primero de ellos, recogiendo una idea de Bruno De Finetti, ha realizado durante los últimos veinte años una generalización de la Teoría del Riesgo Colectivo, solventando el problema de los dividendos sobre un planteamiento de decisión secuencial.

Tievo Pentikäinen intenta superar las insuficiencias señaladas a la Teoría del Riesgo Colectivo, desarrollando un modelo del proceso de dirección de la entidad aseguradora en su totalidad, considerando los aspectos teóricos del riesgo como una parte entre otras que no poseen el carácter actuarial. La introducción de los principales factores ambientales que influyen en el desarrollo del negocio asegurador (inflación,ciclo económico y competencia) potencia la validez del modelo.Queda abierta la posibilidad de considerar en forma aleatoria actividades básicas que se encuentran determinísticamente caracterizadas en una primera aproximación (la inversora, por ejemplo).

+ + + + +

El sector asegurador español ha de afrontar a partir del presente momento un doble reto: por una parte, ha de adaptarse a un marco económico caracterizado por el libre juego de los agentes económicos, presentandose el Estado como encargado del establecimiento y vigilancia de las reglas de la com potencia. De una actividad tipificada por la aprobación administrativa de los precios y una evidente falta de transparencia del mercado, donde la competencia se realiza a través del condicionado de las pólizas, hemos de llegar a una situación en la cual la competencia se realice a través de los precios, utilizandose el control para garantizar los derechos de los asegurados mediante la exigencia de solvencia y profesionalidad a los aseguradores.

Por otra parte, nuestro previsible ingreso en la Comunidad Económica Europea constituye el segundo desafío para el sector: las libertades de Establecimiento y Prestación de Servicios en el ambito comunitario, causarán un fuerte impacto sobre nuestras empresas. En esta linea, hemos de destacar el reciente Real Decreto 3081 / 1.982 de 15 de octubre publicado el 19 de noviembre de 1.982, que adapta la normativa referente al margen de solvencia a la de la C.E.E. estudiada en el epígrafe II.3.5.2, derogando portanto el mencionado Real Decreto 478/1.978 de 2 de marzo. Las consecuencias de su aplicación han de suponer un importante indicio del impacto de la total integración.

Es necesario que nuestros aseguradores realicen un gran esfuerzo de adaptación al nuevo entorno en el que en un próximo futuro han de encontrarse. Es quizá la tecnificación uno de los caminos a seguir para superar el reto del futuro.

V

N O T A S

(1) López Moreno M.Jesús. "El problema conceptual en Economía de la Empresa. Boletin E.E. Asoc. de Licenciados CC.EE - por la U.C.D. nº 84. Bilbao.

(2) Pozo Navarro F.del. "La dirección por sistemas" A.P.D 1974

(3) Pozo Navarro F. del. Opus cit.

(4) Clark, Gale y Gray. "Procedimientos informaticos en sistemas empresariales" 1.973

(5) Vegas Asensio,J. "Sistmeas Informativos" Fac.CC.EE, Madrid

(6) Vegas Asensio.J. Opus cit.

(7) Vegas Asensio,J. Opus cit.

(8) "Analisis de sistemas empresariales".Fac. CC.EE. Curso 77-78

(9) Nieto de Alba,U."El entorno económico en la dirección de la empresa de seguros" A.I.A.E nº13. 1972

(10) Forrester J.W. "Dinámica Industrial" Ed. El Ateneo 1961.

(11) "Analisis de sistemas empresariales" Fac.CC.EE. Curso 77-78

(12) Forrester J.W. Opus cit.

(13) Churchman, Ackoff y Arnoff."Introduccion a la Investigación de Operaciones" Madrid 1.971

(14) Fac. CC.EE. opus cit.

(15) Nieto de Alba,U. "Concepción Cibernética de la Dirección Actuarial en la Empresa de Seguros" C.I.E.S.I. 1970.

(16) Vegas Asensio,J. "Un ensayo sobre la concepción sistema aplicado a la empresa de seguros" 21 C:I.A. Zurich 1980

(17) Bohman, H. "Insurance business described by a mathematical model" S.A.J. 1973

(18) Bohman H. Opus cit.

(19) Borch K. "Mathematical methods in insurance" A.B Vol VII 1974

(20) Wanty y Feverwisch."Modells globaux d'Economie d'Enterpri se" Dunot. Paris 1.970 tomado de "Analisis de sistemas empresariales" F.CC.EE.

(21) Bühlmann,H."Mathematical metods in Risk Theory" Springer-Verlag. New York 1.970.

(22) Gerber. H.U."The dilemma between dividends and safety and generalization of the Lundberg-Cramer formulas" S.A.J. - 1974.

(23) Pechlivanides,P.M."Optimal reinsurance and dividends payment strategies" A.B (10) 1.978.

(24) I.C.E.A. "Plan Estratégico del Seguro español. Revisión - 1.980" Madrid 1.980.

(25) I.C.E.A. Opus cit.

(26) I.C.E.A. Opus cit.

(27) Elaborada en base a:" El derecho de seguros en las Comunidades Europeas y consecuencias para España. Problemas de integración y negociación" F.Mansilla Garcia. UNESPA

(28) Tomadas de: I.C.E.A. Opus cit.

(29) I.C.E.A."El seguro español en la década de los 80".Jornadas de estudio de La Toja. 1.980.

(29) I.C.E.A. Opus cit.

(30) I.C.E.A."Plan estratégico del Seguro español"1.975.

(31) Prieto Perez E. "La problemática de la estadística por - ramos" A.I.A.E. 1980

(32) Prieto Perez.E.Opus cit.

(33) Sixto Rios."Métodos estadísticos" Ed. Castillo 1967.

(34) Nieto de Alba."Apuntes de Matemática Actuarial" Fac. CC. EE. Univ. Complutense. Madrid.

(35) Nieto de Alba."Introducción a la Estadistica" Vol.II Ed. Aguilar.

(36) Beard, Pentikäinen y Pesonen."Risk Theory".Methuen & Co LTD London.1969.

(37) Nieto de Alba. U. Opus cit.

(38) Rios, S. Opus cit.

(39) Beard, Pentikäinen y Pesonen. Opus cit.

(40) Beard, Pentikäinen y Pesonen. Opus cit. Apéndice A

(41) Beard, Pentikäinen y Pesonen. Opus cit. página 44.

(42) Borch, K."La Teoría Económica y el seguro". A.I.A.E. 1964

(43) Borch, K. Opus cit.

(44) Beard, Pentinkäinen y Pesonen. Opus cit.

(45) Segerdal en su trabajo "When does ruin occur in the Collective Theory of Risk?. S.A.J. 1955, demuestra que la probabilidad de ruina para un tiempo ilimitado es aproximadamente igual a la de un período de diez años.

(46) Taylor C.G. "Probability of ruin under inflacionary conditions or under experience rating" AB (10) 1.979.

(47) Vegas Asensio,J.M. "Modelos de decisión en reaseguro" - A.I.A.E. nº 17 1.976.

(48) Reinard,R,C."La gerencia del reaseguro" Ed. MAPFRE.

(49) Carter, R.L."El reaseguro" ED. MAPFRE.

(50) Prieto Perez. Eugenio. "El reaseguro:función económica" Ed. I.C.E 1973.

(51) Hernando de Larramendi,I."Clases de reaseguro" B.O de Seguros y Ahorro.

(52) Reinard, R.C. Opus cit.

(53) Carter, R.L. Opus cit.

(54) Carter, R.L. Opus cit.

(55) Hernando de Larramendi. Opus cit.

(56) Prieto Perez E. Opus cit.

(57) Beard, Pentikäinen y Pesonen. Opus cit,

(58) B.P.y P. Opus cit. Capítulo 9.

(59) Prieto Perez.E. Opus cit.

(60) Vegas Asensio. J.M. Opus cit.

(61) Verbeek H.G. "On optimal reinsurance" A.B. 1966

(62) Nieto de Alba,U. Opus cit.

(63) Vegas Asensio,J.M. Opus cit.

(64) B..P y P. Opus cit.

(65) Nieto de Alba, U. "Reaseguro óptimo" R.Y.S nº 20

(66) Borch. K. Opus cit.

(67) Burnens, E. "Contingency loading in life assurance". 19 C.I.A.

(68) Nieto de Alba, U. Bases Técnicas y Reservas de Riesgos en Curso" A.I.A.E 1964.

(69) Buhlmann, H. "Mathematical metods in Risk Theory" Springer-Verlag 1.970.

(70) Berliner,B. "On the choice of risk loading" 20 C.I.A. - Tokio.

(71) Berliner B. Opus cit.

(72) Bohman,H y F. Esscher. "Studies in Risk Theory with numerical illustration concerning distribution functions and stop-loss premiums" Almqvist & Wicksells Upsala 1.964

(73) Berliner B. "Some thoughts on (Re) insurance loadings under a ruin criterion" S.A.J. 1974

(74) Benktander,G ."Some aspects of reinsurance profit and loadings" A.B. (5) 1.971

(75) Berliner, B. Opus cit.

(76) Benktander,G. Opus cit.

(77) Benktander,G."A note on profit margin and insurance market capacity" M.V.S.V vol.70 nº1, 1.970

(78) Benktander,G. Opus cit.

(79) Buhlmann,H. Opus cit.

(80) Berliner,B. "A risk mesaure alternative to the variance" A.B. Vol.IX. 1.977.

(81) Markowitz. "Portfolio selection".Cowles foundation for Research in Economic at Yale University 1959.

(82) Bowers."An upper bound on the stop-loss net premium"Society of Actuaries. Transactions Vol.XXI 1969.

(83) Bowers. Opus cit.

(84) Berger. Opus cit.

(85) Bohman, H. "Solvency and profitability standards" S.A.J. 1.976.

(86) Kahane, Y. "The theory of insurance risk premiums - a reexamination in the light of recent developments in capital market theory" A.B. 10. 1.979.

(87) Garcia Esteban. F. "Contabilidad de seguros" Madrid 1979.

(88) Prieto Perez.E."El Margen de Solvencia en la C.EE y España" I.A.E.

(89) Special Committee on insurance holding companies: The concep of surplus. Recogido por Borgues Buchon "El balance - como expresión de la situación de solvencia del asegurador en España" A.I.A.E 1.975.

(90) Stewart,C.M."The assesment of solvency" A.B.

(91) Wit,G.W y W.M. Kastelijn."The solvency margin in non-life insurance companies" A.B. (11) 1.980.

(92) Mansilla García.Opus cit.

(93) Beard, Pentikäinen y Pesonen. Opus cit.

(94) I.C.E.A. Opus cit.

(95) Prieto Perez E. "Las entidades de seguros como intermediarios financieros" A:I.A.E. 1976.

(96) Suarez Suarez,A."Decisiones óptimas de inversión y financiación" Ed. Pirámide.

(97) Borch,K. "The optimal portfolio of assets in an insurance company" 18 C.I.A.

(98) Fernández Pirla,J.M."Teoría Económica de la Contabilidad" Madrid 1.967.

(99) Para el estudio del período de maduración de la empresa aseguradora, hemos de destacar los trabajos de:
Nieto de Alba,´U. "Ensayo para una teoría de la liquidez e inversión de las reservas técnicas" 18 C.I.A.

Gorgues Buchon. "Estudio del período de maduración en la empresa aseguradora" A.I.A.E. 1.978.

(100) 'Gorgues Buchón. obra citada.

(101) García Esteban. Opus cit.

(102) Bayley,R.A. "Insurance investment regulation" P.C.A.S Vol LVI, part 1ª. 1969.

(103) Bayley,R.A. Opus cit.

(104) Gorgues Buchon."El balance como expresión de solvencia - del asegurador en España" A.I.A.E. 1975

(105) Kahane,Y."Solidity, leverage and the regulation of insurance companies" 21 C.I.A Zurich 1.980.

(106) Gorgues Buchon."El balance como expresión de solvencia - del asegurador en España" A.I.A.E 1975

(107) Aldaz e Isanta."El Margen de Solvencia en las empresas - de seguros" RYS nº 15 y 16.

(108) Bohman H. "Management accounting systems looked upon specially from the point of view of inflation" 20 C.I.A. Tokio 1.976.

(109) Taylor,C.G. "Separation of inflation and other effects from the distribucion of non-life insurance claim delays" A.B. Vol.IX. 1.977.

(110) Jewell,W.S. "Generalized models of insurance business - (life and/or non life insurance) 21 C.I.A

(111) Haehling von Lanzenauer y Lundberg."The propensity to - cause accidents" A.B. (7) 1.973

(112) De Pril,N. "The efficiency of a bonus-malus sistem" A.B. (10) 1.978.

(113) Lemaire,J."Driver versus company" S.A.J. 1.976.

(114) Norberg,R."Credibility premium plans which make allowande for bonus hanger" S.A.J. 1.975

(115) I.C.E.A."Modelo de control presupuestario para entidades de seguro". Madrid 1.978.

(116) Nieto de Alba. Opus cit.

(117) Pitkänen, P. "Tariff Theory" A.B. Vol.VIII. 1975.

(118) Buhlmann,H. Opus cit.

(119) Vegas Asensio,J.M. "Aplicaciones de la teoría de la credibilidad a la tarificación de riesgos" Seguros

(120) Beard, Pentikäiene y Pesönen. Opus cit.

(121) De Finneti,B."Su un'impostazione alternativa della teoría collectiva del rischio" 15 C.I.A. 1,957.

(122) Consideraremos, para la elaboración de este capítulo los siguientes trabajos del profesor Borch:

-- "Una generalización de la Teoría del Riesgo Colectivo" A.I.A.E. 1.965.

-- "Payment of dividends by insurance compañies" 17 C.I.A

--"The mathematical theory of insurance" D.C. Heath Lexinton. 1974.

--"Mathematical models in insurance" A.B. Vol.VIII. 1974

--"Objetives and optimal decision in insurance" 20 C.I.A 1.976. Tokio.

--"Is regulation and supervision of insurance companies necessary" S.A.J. 1.981

(123) Vegas Asensio, J.M opus cit.

(124) Nieto de Alba, U Opus cit.

(125) Bohman, H. "Insurance bussines described by a mathematical model" S.A.J. 1.973.

Abreviaturas:

A.I.A.E: Anales del Instituto de Actuarios Españoles.

C.I.A : Congreso Internacional de Actuarios.

A.B. : ASTIN bulletin.

S.A.J.: Scandinavian Actuarial Journal.

P.C.A.S.: Proceedings of the Casualty Actuarial Society.

VI

B I B L I O G R A F I A

Ackoff y Sasieni. Fundamentos de investigación de operaciones Ed. Limusa. Mexico.

Andreadakis y Waters. The effect of reinsurance on the degree of risk asociated with an insurer's portfolio. A.B. (11) 1.980.

Aldaz e Isanta. El margen de solvencia en las empresas de seguros. RYS nº 15 y 16.
- Aspectos técnicos de la vigilancia y control de las empresas de seguros. A.I.A.E. 1.969.

Bailey R.A. Insurance investment regulation. P.C.A.S. Vol. - LVI. Part. 1. 1.969.

Banasinski,A. Insurance as a cibernetic institution of regulation of the national economy. A.B. (5). 1971.

Beard,A.E. Verification of outstanding claim provisions.- separation tecnique. A.B. (IX). 1977.

Beard, Pentikäinen y Pesonen.- Risk Theory. Methuen & Co. LTD London. 1.969.

Beer, S. Cibernética y Administración. C.E.C.S.A. 1.965.

Benjamin, S. Solvency and profitability in insurance. 21.CIA 1.980

Benktander,G. Some aspects on reinsurance profits and loading. A.B. 1.974.
-- A note on optimal reinsurance. A.B. (8). 1975.
-- A note on profit margin and insurance market - capacity. M.V.S.V vol 70 nº1. 1970.

Berger, G. An attemp on the subject profit goal and security loading in risk insurance. 19. CIA. 1.972.

Berliner, B. Some thoughts on (Re) insurance loading under a ruin criterion. S.A.J. 1.974.
-- On the choice of risk loading. 20 CIA 1.976 - Tokio.
-- A risk mesaure alternative to the variance. A.B. Vol.IX enero 1.977.

Berliner,B. On the use of the maximun entropy concep in insurance. 20 CIA. 1.976.

Bohman, H. Management accounting systems looked upon specia-lly from the point of view of inflation. 20 CIA - 1.976.

-- Problems connected with actuarial treatment of the risk process in a insurance company. 18 CIA - 1968.

-- Insurance bussines described by a mathematical model. S.A. J. 1.973

-- Solvency and profitability standards. S.A.J . - 1.976.

-- Fourrier inversion- Distribution function - long tail S.A.J. 1.974.

-- y Esscher. Studies in Risk Theory with numeri-cal illustrations concerning distributions func- - tions and stop-loss premiums. Alqwist & Wicksells. Upsala 1964.

Borch, K.- Mathematical models in insurance. A.B. Vol. VIII - 1.974.

-- Payment of dividend by insurance companies. 17- CIA 1.964

-- Objetives and optimal decisions in insurance - 20 CIA 1976.

-- Risk management and compa objetives. 18 CIA - 1.968.

-- Is regulation and supervision of insurance companies necessary? S.A.J. 1.981.

-- Insurance and the theory of asset prices. 21 - CIA. 1976.

-- La Teoría Económica y el seguro. A.I.A.E. 1.964.

-- Una Teoría Económica del seguro. A.I.A.E. 1.964.

-- Una generalización de la Teoría del Riesgo Colec-tivo. A.I.A.E. 1.965.

-- La dirección de las compañías de seguros. Un estudio dentro de la Teoría Económica. A.I.A.E.1966.

Borch, K. The optimal portfolio of assets in insurance company. 18 CIA. 1.968.
-- The mathematical theory of insurance. D.C. Heath. Lexinton. 1.974.

Borge, T. Aplications and construction principles of a corporate planning model. 20 CIA. 1976.

Bowers, T. An upper bound on the stop-loss net premium. Society of actuaries. Transactions. Vol.XXI. 1969.

Buhlmann, H. Mathematical metods in Risk Theory. Springer-Verlag 1.970.
El problema de las reservas técnicas en seguros no vida. A.I.A.E. 1.970.

Burnens, E. Contingency loadings in life assurance. 19 CIA 1.972.

Clark, Gale y Gray. Procedimientos informáticos en sistemas empresariales. 1.973.

Casa Aruta. Elaboración de un presupuesto a corto plazo. AIAE 1.973.

Cetta F. A model of optimal portfolio for an insurance company. 21 CIA 1.980.

Churchman, Ackoff y Arnoff. Introducción a la Investigacion de Operaciones. Madrid 1.971.

Churchman. El enfoque de sistemas. Diana. 1.973.

De Finneti. Su un'impostazione alternativa della teoria collectiva del rischio. 15 CIA. 1957.

De Pril, N. The efficiency of a bonus-malus system. A.B. (10) 1.975.

D'Hooge, L. and M.J. Goovaerts. Bayesian inference in credibility theory. A.B. Vol VIII. 1.975.

Dreyfus. Dinamic programming and the calculus of variations Academic Press. 1.965.

Fernández Pirla, J.M. Teoría Económica de la Contabilidad. - I.C.E. Madrid 1.967.

Forrester, J.W. Dinámica Industrial. El Ateneo. 1.961.

García Esteban. Contabilidad de seguros. Madrid 1.974.

Gerberm Hans. The dilemma between dividents and safety and a generalization of the Lundberg-Cramer formulas. S.A.J. 1.974.

Gerez,V. y Czitrom, V. Introducción al análisis de sistemas e investigación de operaciones.

Giarini, O. Teoría Económica y Seguro. A.I.A.E. 1.977.

Gorgues Buchon. El balance como expresión de solvencia del asegurador. A.I.A.E. 1.975.

-Estudio del período de maduración en la empresa aseguradora. A.I.A.E. 1.978.

-Consideraciones en torno al análisis de los estados contables en las empresas de seguros. A.I.A.E. 1.977

Haeling von Lanzenauer y Lundberg. The propensity to cause accidents. A.B. (7) 1.973.

Hernando de Larramendi. Clases de reaseguro. B.O. de Seguros y Ahorro.

Hirvonen, T. Disscussions 20 CIA. Tokyo 1.976.

I.C.E.A. Plan estratégico del seguro español. 1.975.

- Plan estratégico del seguro español. Revisión -- 1.980. Madrid 1.980.

- El seguro español en los 80. Madrid 1.980.

- Modelo de control presupuestario para las entidades de seguros . Madrid 1.978.

Jewell, W.S. Generalized models of the insurance business - life and/or non life insurance) 21 CIA. 1.980.

Kahane Y. Solidity, leverage and regulation of insurance - companies. 21 CIA. 1.980.

-- The theory of insurance risk premiums - a re-examination in the light of recent developments in capital market theory. A.B. (10) .1978.

- y Sarnat. Un enfoque alternativo para la evaluación de la rentabilidad en seguros generales. - A.I.A.E. 1.978.

Kimbal, S.L. Solvencia financiera de las aseguradoras. Actualidad aseguradora. Julio 1.979.

Klir, G.J. Teoría General de los Sistemas. I.C.E. 1.978.

Lemaire, J. Driver versus company. S.A.J. 1.976.

Lopez Cachero, M. Metodos de decisión económica en régimen - de certidumbre. Anales CUNEF 1.979.

-- Decisión y conecepciones de la utilidad. Anales CUNEF. 1.980.

-- Metodos operativos de gestión. Programación dinámica. UNED 1.976.

Lopez-Moreno, M.J. El problema conceptual en economía de la - empresa. B.E.E. nº 94. Asociacion de licenciados - CC.EE. por la U.C.D. Bilbao.

Lunberg, O. Note on actuarial management in inflationary conditions. A.B. (9) 1.977.

Mansilla Garcia, F. Técnicas de control en las empresas de seguros. A.I.A.E. 1.969.

-- El derecho de seguros en las comunidades europeas y consecuencias para España. Problemas de integración y negociación. UNESPA. 1979.

Nieto de Alba, U. El entorno economico de la empresa de seguros. A.I.A.E. 1.972.

-- Bases técnicas y reservas de riesgos en curso - A.I.A.E. 1.964.

Nieto de Alba, U. Solvencia, Beneficios y control de la empre sa financiera. A.I.A.E. 1.973.

-- Ensayo para una teoría de la liquidez e inversión de las reservas técnicas. 18 CIA. 1.968.

-- Reaseguro óptimo. RYS 20.

-- Concepción cibernética de la dirección actuarial en la empresa de seguros. C.I.E.S.I. 1.970.

-- Apuntes de matemática actuarial. Fac. CC.EE.

-- Control y política de seguros.

-- Aspectos estadisticos de la ciencia de la dirección. Anales del CUNEF. 1.979.

-- Introduccion a la estadistica. Tomos I-II y III- Aguilar.

-- La función de entropía en las decisiones de inversión. Anales del CUNEF 1.980.

-- Economía de mercado y Constitución. Anales del - CUNEF. 1980.

Norberg, R. Credibility premiums plans which make allowance for bonus hanger. S.A.J. .975.

Ottaviani, G. Alcune considerazione sulla teoría collectiva - del rischio. 15 CIA. 1957.

Pechlivanides P.M. Optimal reinsurance and dividends payment-strategies. A.B. (10) 1.978.

Pentikäinen.T. A model of stochastic- dinamic prognosis. An - application of risk theory to business planning. - S.A.J. 1.975.

-- Dinamic programming, an approach for analysing - competition strategies A.B. (10) 1.979.

-- Stochastic-dinamic prognosis. 20 C.I.A. 1.976.

-- Discussións 20 CIA 1.976.

-- A solvency testing model building approach for - business planning. S.A.J. 1.978.

-- A stochastic dinamic model for insurance business 21 CIA. 1.980

Pentikäinen, T. Evaluation of the capacity of risk carriers - by means of stochastic-dinamic programming. A.B. - (12) 1.981.

Pitkanen, P. Tariff theory. A.B. vol. VIII 1.975.

Pozo Navarro. La dirección por sistemas. A.P.D. Madrid 1.975.

Prieto Perez E. Aplicaciones de la emp resa aseguradora a la gestion de la empresa aseguradora. 21 CIA. 1980.
-- La función económica del reaseguro y su precio A.I.A.E. 1.975.
-- Aplicaciones al seguro de la distribución binomial negativa. A.I.A.E. 1.972.
-- Las entidades de seguros como intermediarios - financieros. A.I.A.E. 1.976.
-- La problemática estadística por ramos. A.I.A.E. 1.980.
-- Dimensión y solvencia en la empresa de seguros CUPE Vol VI, 1980.
El margen de sol encia en la CEE y en España Instituto de Actuarios Españoles 1.979.
-- El reaseguro. Función económica. Edit. I.C.E -- Madrid 1.973.
-- y Aldaz. Un análisis del seguro privado desde el ángulo de las cuentas nacionales. A.I.A. E. - 1.977.

Riggs, J.L. Modleos de decisión económica para ingenieros y - gerentes de empresa. Ed. Alinza. Madrid.

Rios, Sixto. Métodos estadísticos. Ed. Castillo. 1975.

Rotundo, E. Introducción a la Teoría General de los Sistemas.

Rushton, I.L. Some uses of models in general insurance management. 20 CIA. 1980.

Ryan, J.P. An aplication of model officce thecniques to solvency question. 20 CIA. 1976.

Ryder,J.M. A general theory of insurance. 20 CIA. 1.976.

Saito. T. Actuarial approach to determing fair retention limits. 20 CIA. 1976.
-- Discussions 20 CIA 1.976.

Segerdal. C.O. When does the ruin ocurr in the collective theory of risk. S.A.J. 1.955.

Stewart.C.M. The assesment of solvency. A.B. 1.974.

Suarez Suarez.A. Decisiones óptimas de inversión y financiación. Ed. Piramide Madrid.

Taylor C.G. Separation of inflation and other effects from the distribution of non life insurance claim delays. - A.B. (IX) 1.977.
-- Probability of ruin un der inflationary conditions or under experience rating. A.B. (10) 1.979.

U.N.E.S.P.A. España-CEE; impacto de la libertad de prestación de servicios en el seguro español. Madrid 1.981.

Verbeeck,A,G. On optimal reinsurance. A.B. 1.966.

Vegas Asensio, J.M. Un ensayo sobre la concepción sistema aplicado a la empresa de seguros. 21 CIA.
-- La empresa aseguradora como servo-sistema. Seguros nº 45. 1973.
-- Aplicaciones de la teoría de la credibilidad a la tarificación de riesgos. Seguros nº 52. 1.974.
-- Modelos de decisión en reaseguro. A.I.A.E. 1976.
-- Sistemas de información decisión en la empresa Anales del CUNEF. 1.979.
-- La empresa como sistema. Anales del CUNEF. 1981.

Vegas Perez,A. Aplicaciones de la teoria de juegos de estrategia al problema de la integración de riesgos. 18 CIA. 1.968.
-- Aplicaciones actuariales de la teorías de la fiabilidad y credibilidad. 18 CIA. 1968.
-- Estadistica. Aplicaciones econométricas y actuariales. Ed. Pirámide 1.981.

Vegas Peerez A. Valor probable de las partidas condicionales Anales del CUNEF. 1.980.

Viet, K.P. The use of sistems dinamic simulation model for corporate long range strategic planning. 20 CIA. - 1.976.

Wit, G.N. y Kastelyn, W.M. Teh solvency margin in non life insurance companies. A.B. (11) 1.980.

Wanty y Feverwisch. Modellis globaux d'Economie de Enterprise. Dunot. Paris 1.970.

Yukiya Ariyoso y Yoshaki Misumi. A few mathematical aspects concerning contingency reserve. 19 CIA 1.972.